Теоретическая механика. Экзамен — 2022

Часть 1

1. Основные свойства пространства и времени. Системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея. Преобразование Галилея.
2. Кинематика материальной точки. Траектория. Скорость, ускорение и их проекции на оси естественного трехгранника.
3. Второй закон Ньютона. Импульс. Понятие силы. Масса инертная и гравитационная. Момент импульса. Секторная скорость. Момент силы. Теоремы сохранения импульса и момента импульса.
4. Прямая и обратная задача механики. Интегрирование уравнений движения. Первые и вторые интегралы движения. Условия независимости интегралов движения. Примеры: случаи, когда сила равна нулю и когда момент силы равен нулю.
5. Работа силы. Кинетическая энергия. Консервативные силы и потенциальная энергия. Закон сохранения энергии. Консервативность центральной силы.
6. Движение материальной точки в центральном поле. Первые интегралы движения. Плоскость орбиты. Полярные координаты. Вторые интегралы. Уравнение траектории.
7. Возможные траектории движения материальной точки в центральном поле. Финитное и инфинитное движение. Падение на центр. Условие замкнутости траектории.
8. Задача Кеплера. Сведение задачи двух тел к движению материальной точки в центральном поле. Закон всемирного тяготения Ньютона.
9. Общее исследование возможных траекторий в случае ньютоновского потенциала. Уравнения траекторий в канонической форме. Эксцентриситет. Типы орбит.
10. Законы Кеплера.
11. Рассеяние частиц неподвижным силовым центром. Прицельное расстояние (параметр удара). Угол рассеяния. Дифференциальное сечение рассеяния.
12. Рассеяние заряженных частиц электрическим полем неподвижного заряда. Формула Резерфорда.
13. Упругие столкновения частиц. Углы рассеяния в лабораторной системе и их выражение через углы рассеяния в системе центра инерции.
14. Динамика системы материальных точек. Третий закон Ньютона. Силы внешние и внутренние. Движение центра инерции. Импульс и момент импульса системы, законы их сохранения.
15. Энергия системы материальных точек. Закон сохранения энергии.
16. Теорема вириала.
17. Движение при наложенных связях. Классификация связей. Примеры голономных и неголономных связей. Идеальные связи. Уравнения Лагранжа 1-го рода.
18. Принцип виртуальных работ. Обобщенные координаты. Принцип Даламбера. Уравнения Лагранжа 2-го рода. Функция Лагранжа.
20. Обобщенный импульс. Циклические координаты. Формулировка законов сохранения с помощью функции Лагранжа.
21. Связь законов сохранения импульса, момента количества движения и энергии с однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени.
22. Силы трения, пропорциональные скорости, их учет в лагранжевой формулировке механики. Диссипативная функция Рэлея.
23. Понятие малых колебаний. Устойчивое равновесие. Кинетическая и потенциальная энергия системы материальных точек, совершающих малые колебания. Уравнения движения.
24. Малые колебания системы материальных точек. Комплексные амплитуды. Собственные частоты, их вещественность.
25. Малые колебания системы материальных точек. Общий вид решения. Матрица

комплексных амплитуд и ее свойства.
26. Малые колебания системы материальных точек. Нормальные координаты.
27. Малые колебания системы материальных точек. Случай кратных корней характеристического уравнения.
28. Вынужденные колебания. Явление резонанса.
29. Малые колебания при наличии сил трения. Комплексная частота, Коэффициент затухания.
30. Вынужденные колебания при наличии затухания.
31. Понятие абсолютно твердого тела. Обобщенные координаты для твердого тела: направляющие косинусы, углы Эйлера. Выражение матрицы поворота через углы Эйлера.
32. Кинематическая теорема Эйлера о произвольном перемещении твердого тела с одной неподвижной точкой. Теорема Шаля.
33. Угловая скорость, ее свойства. Мгновенная ось вращения. Скорость и ускорение точек твердого тела.
34. Движение в неинерциальной системе отсчета. Ускорение во вращающейся системе. Силы инерции: центробежная сила, сила Кориолиса.
33. Кинематические уравнения Эйлера.
35. Импульс и Кинетическая энергия твердого тела. Тензор инерции. Момент инерции относительно данной оси. Теорема Штейнера.
36. Момент количества движения твердого тела. Главные оси инерции и главные моменты инерции. Симметричный волчок, шаровой волчок, ротатор. Эллипсоид инерции.
37. Динамические уравнения Эйлера. Решение уравнений Эйлера для свободного симметричного волчка. Регулярная прецессия.
38. Стационарность и устойчивость вращения волчка с произвольными моментами инерции.
39. Геометрическая интерпретация Пуансо для свободного движения волчка с произвольными моментами инерции.

Часть 2

40. Конфигурационное пространство. Действие. Виртуальные траектории. Основы вариационного исчисления. Понятия функционала, вариации функции, вариации функционала, экстремали. Уравнения Эйлера для отыскания экстремалей. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода из принципа наименьшего действия Гамильтона.
41. Переход к методу Гамильтона посредством преобразования Лежандра. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона
42. Вывод канонических уравнений Гамильтона из вариационного принципа.
43. Связь функции Гамильтона с полной энергией системы
44. Циклические координаты в методе Гамильтона. Метод Рауса.
45. Укороченное действие. Принцип Мопертюи. Принцип Мопертюи для материальной точки, на которую не действуют внешние силы.
46. Принцип Мопертюи в форме Якоби-Герца. Фундаментальный метрический тензор. Геодезические линии.
47. Определение канонических преобразований. Производящие функции различных типов, связь между ними.
48. Примеры канонических преобразований: тождественное преобразование, точечные преобразования, ортогональные преобразования.
49. Использование канонических преобразований в случае, когда все координаты циклические. Решение задачи о гармоническом осцилляторе методом канонических преобразований.
50. Инварианты канонических преобразований. Скобки Пуассона и скобки Лагранжа.

Доказательство инвариантности скобок Лагранжа.

51. Фундаментальные скобки Лагранжа и Пуассона. Доказательство инвариантности фундаментальных скобок Пуассона относительно канонических преобразований.
52. Доказательство инвариантности скобок Пуассона относительно канонических преобразований.
53. Свойства скобок Пуассона. Тождество Якоби, его доказательство.
54. Скобки Пуассона и интегралы движения.
55. Бесконечно малые канонические преобразования. Движение системы как бесконечно малое каноническое преобразование.
56. Бесконечно малые канонические преобразования и законы сохранения.
57. Интегральные инварианты Пуанкаре.
58. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема.
59. Уравнение Гамильтона-Якоби. Главная функция Гамильтона.
60. Решение уравнения Гамильтона-Якоби для гармонического осциллятора.
61. Уравнение Гамильтона-Якоби для случая гамильтониана не зависящего явно от времени. Характеристическая функция Гамильтона.
62. Разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. Пример: движение в поле центральной силы.
63. Периодические движения типа колебания и вращения. Фазовые траектории. Цикл периодического движения. Примеры: гармонический осциллятор, плоский маятник.
64. Переменные действие - угол. Многопериодические движения.
65. Адиабатическая инвариантность переменных действия.

Из рабочей программы учебной дисциплины «Теоретическая механика (траектория 1 — общий курс)»:
1) Экзамен проводится в устной форме. Билет экзамена содержит два вопроса; первый вопрос — по материалам первой части курса, второй вопрос — по материалам второй части курса. На подготовку отводится не более 1 часа. Студенты, успешно сдавшие коллоквиум, отвечают только на второй вопрос билета. Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый материал билета и правильные ответы на дополнительные вопросы по всей программе курса. Оценка «хорошо» ставится за полностью раскрытый материал билета при неточных ответах на дополнительные вопросы по всей программе курса. Оценка «удовлетворительно» ставится за не полностью раскрытый материал билета при отсутствии правильных ответов на часть дополнительных вопросов. Оценка «неудовлетворительно» ставится, если ответ студента не удовлетворяет перечисленным выше критериям оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно». Допускается пересдача неудовлетворительной оценки коллоквиума во время экзамена. Общая оценка за экзамен по теоретической механике выставляется на основе результатов коллоквиума и ответа на экзамене.
2) Во время коллоквиума и экзамена студенты имеют право пользоваться своими конспектами при соблюдении следующих правил: а) Конспекты во время проведения экзамена или коллоквиума лежат на отдельном столе в той аудитории, где проводится аттестация. б) Студент может подойти и посмотреть свой конспект в течение короткого времени (не более 5 минут). в) Запись материала конспекта на отдельные листы, а также перенос его со стола в аудиторию не допускаются.

Литература

Основная

1. И. И. Ольховский, Курс теоретической механики для физиков, изд-во МГУ, 1978.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, «Наука», 1988.
3. Г. Голдстейн, Классическая механика, Физматгиз, 1975.

Дополнительная

4. В. Г. Невзглядов, Теоретическая механика, Физматгиз, 1959.
5. В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, «Наука», 1989.

Теоретическая Механика

Петров А.Н.

1 Основные свойства пространства и времени. Системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея. Преобразование Галилея.

Что изучает классическая механика? Классическая механика изучает движение тел друг относительно друга.

Ограничения

- со стороны СТО: $v << c$
- со стороны ОТО: допускается предположение о мгновенности распространения взаимодействия; малые гравитационные поля
- со стороны квантовой механики: погрешностями для координат и импульсов вытекающими из принципа неопределенности $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ можно пренебречь. $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка. Пример: пылинка $m = 10^{-12}$кг, $\Delta x = 10^{-8}$м, $\Delta v = 6.6 \cdot 10^{-14}$ м/с

Область применимости - относительно медленное по сравнению со скоростью света движение макроскопических тел.

С точки зрения современной теории абсолютного пространства не существует. Когда говорят о движении в пространстве всегда подразумевается движение тел друг относительно друга. Каждое движение обладает длительностью. Для описания движения подразумевается, что мы можем измерять расстояния, проводить параллельные прямые, измерять время с помощью периодических процессов.

Для описания движения тел в пространстве удобно ввести определения

- Материальной точкой называется тело размерами которого можно пренебречь по сравнению с размерами характеризующими движение самого тела.
- Совокупность тел каждое из которых можно считать материальной точкой называют системой материальных точек

- Абсолютно твердое тело это система материальных точек расстояние между которыми неизменно.

Система отсчета Рассмотрим движение системы материальных точек A относительно твердого тела S. Свяжем с твердым телом S три некомпланарных (ортогональных) единичных вектора $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ имеющих общее начало в точке O. Иными словами введем декартову систему координат, которую также называют *системой отсчета* S. Разложим радиус вектор $\mathbf{r}$ точки системы A по базисным векторам

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \tag{1}$$

где x, y, z декартовы координаты точки. В предыдущих рассуждениях молчаливо подразумевается, что мы умеем проводить параллельные прямые, измерять расстояние между точками. Ур. (2) показывает, что пространство является трехмерным.

Радиус вектора различных точек будем нумеровать подстрочным индексом:

$$\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{e}_x + y_i\mathbf{e}_y + z_i\mathbf{e}_z, \tag{2}$$

Рассмотри радиус вектора

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y + z_1\mathbf{e}_z, \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y + z_2\mathbf{e}_z \tag{4}$$

двух точек 1 и 2. Вектор проведенный из точки 1 в точку 2 равен

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{5}$$

На основании опыта (с помощью уже использованного эталона длинны) оказывается, что расстояние между точками 1 и 2 равняется

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}. \tag{6}$$

Причем равенство (6) справедливо для любой другой ортонормированной (S' (O',$\mathbf{e}_{x'}$, $\mathbf{e}_{y'}$, $\mathbf{e}_{z'}$)) двигающейся произвольным образом системы координат:

$$r'_{12} = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2} = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2} \tag{7}$$

и

$$r'_{12} = r_{12} \tag{8}$$

Таким образом, пространство в теоретической механике является **эвклидовым**.

Так как в системах отсчета S и S' рассматриваются одни и те же точки, то из равенства (8) следует равенство векторов

$$\mathbf{r}'_{12} = \mathbf{r}_{12} \tag{9}$$

или

$$\Delta x \mathbf{e}_x + \Delta y \mathbf{e}_y + \Delta z \mathbf{e}_z = \Delta x' \mathbf{e}_{x'} + \Delta y' \mathbf{e}_{y'} + \Delta z' \mathbf{e}_{z'} \tag{10}$$

Для написания формул удобнее перейти от буквенных к численным индексам:

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3, \tag{11}$$

$$x = x_1; \quad y = x_2; \quad z = x_3, \tag{12}$$

$$\mathbf{e}_{x'} = \varepsilon_1; \quad \mathbf{e}_{y'} = \varepsilon_2; \quad \mathbf{e}_{z'} = \varepsilon_3, \tag{13}$$

$$x' = x'_1; \quad y' = x'_2; \quad z' = x'_3. \tag{14}$$

И аналогично для случая многих частиц

$$x_i = x_{i1}; \quad y_i = x_{i2}; \quad z_i = x_{i3}. \tag{15}$$

.

Как известно из математики, ортонормированные базисы эвклидова пространства и координаты одного и того же вектора связаны ортогональным преобразованием

$$\varepsilon_j = \sum_i \mathbf{e}_i C_{ij} \tag{16}$$

$$x_i = \sum_j C_{ij} x'_j, \tag{17}$$

где $\mathbf{C}$ - ортогональная матрица:

$$\sum_i C_{ij} C_{ij'} = \delta_{jj'} \tag{18}$$

$$\sum_j C_{ij} C_{i'j} = \delta_{ii'} \tag{19}$$

Из уравнения (9) следует важное соотношение между радиус-векторам одной и той же точки в разных системах отсчета. Пусть $\mathbf{r}_{O'}$ - радиус-вектор начала система S' относительно системы S, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ радиус-вектора рассматриваемой точки в системах S и S'. Тогда взяв в качестве точки 1 точку O'

(начало системы отсчета S') и в качестве точки 2 рассматриваемую точку имеем $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{O'}$, $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{0}$ и с помощью уравнения (9) получаем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}' \tag{20}$$

Перечисли свойства пространства в классической механике

- трехмерно
- эвклидово
- однородно (все точки пространства эквиваленты) и изотропно (все направления эквивалентны)

Время в классической механике абсолютно, протекает одинаково в разных системах отсчета: $t = t'$

Законы движения разные в разных системах отсчета. Наиболее просты они в **инерциальных системах отсчета** (ИСО). Это такие системы отсчета в которых тело при отсутствии действующих на него сил движется прямолинейно и равномерно. Первый закон Ньютона по сути является определением ИСО и утверждения, что такие системы существуют. В действительности такие системы являются идеализацией классической механики. Так как первый закон Ньютона не делает различий между состоянием покоя и состоянием прямолинейного и равномерного движения, то очевидно, что всякая система движущаяся прямолинейно и равномерно относительно инерциальной также является инерциальной. Преобразования координат от одной инерциальной системы отсчета к другой называемые преобразованиями Галилея имеют вид

$$x'_i = x_i - v_i t \tag{21}$$

$$x_i = \sum_j C_{ij} x'_j, \tag{22}$$

При преобразованиях Галилея уравнения движения сохраняют свой вид. Можно сформулировать более общее утверждение касающееся не только законов классической механики: Равномерное и прямолинейное движение материальной системы как целого не влияет на ход процессов происходящих внутри системы.

2 Кинематика материальной точки. Траектория. Скорость, ускорение и их проекции на оси естественного трехгранника.

Кинематика - раздел механики который изучает геометрию движения, не интерисуясь причинами, которые вызывают это движение.

При перемещении точки конец радиус-вектора описывает кривую, которая называется траекторий точки. Скорость точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \tag{23}$$

Ускорение точки:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \tag{24}$$

Разложение по неподвижным ортам $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i, \tag{25}$$

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i = \sum_i \dot{v}_i \mathbf{e}_i = \sum_i \ddot{x}_i \mathbf{e}_i \tag{26}$$

оси естественного трехгранника. Переменная длинны дуги $s(t) = \int_0^t v dt$ является монотонной (возрастающей) функцией времени, поэтому радиус-вектор $\mathbf{r}(s)$ является однозначной функцие s. Рассмотри вектор

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{27}$$

Вектор τ- единичный вектор направленный вдоль касательной к кривой. Действительно, $|\tau| = |\frac{d\mathbf{r}}{ds}| = |\frac{d\mathbf{r}}{dt}|\frac{dt}{ds} = \frac{v}{v} = 1$; $\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$ (Касательная это прямая проходящая через точку $\mathbf{r}(t)$ параллельно $\dot{\mathbf{r}}$).

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\frac{d\tau}{ds}|}\frac{d\tau}{ds}, \tag{28}$$

где

$$|\frac{d\tau}{ds}| = k > 0 \tag{29}$$

кривизна траектории, $\mathbf{n}$ - единичный вектор вдоль главной нормали к траектории. Согласно (28) имеем

$$\frac{d\tau}{ds} = k\mathbf{n}, k > 0. \tag{30}$$

$k = 0$ для движение по прямой, так как $\tau =$const в этом случае. Вектор $\mathbf{n}$ ортогонален вектору τ. Действительно,

$$\frac{d}{ds}(\tau, \tau) = 0, \tag{31}$$

так как $(\tau, \tau) = 1 = \text{const}$. С другой стороны

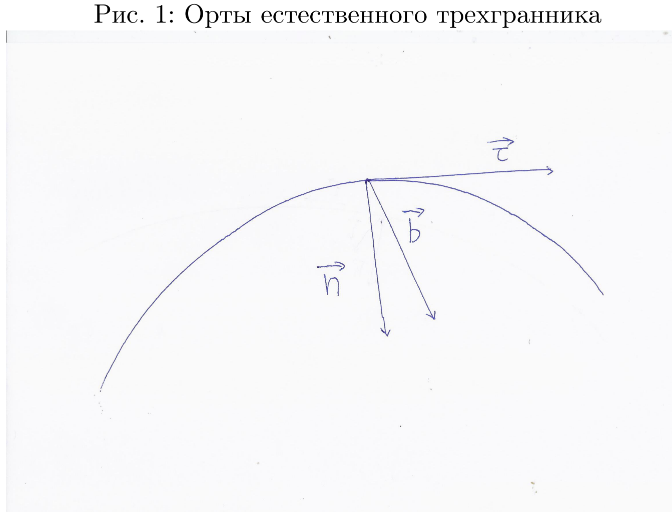
$$\frac{d}{ds}(\tau, \tau) = (\frac{d\tau}{ds}, \tau) + (\tau, \frac{d\tau}{ds}) = 2(\frac{d\tau}{ds}, \tau) = 2k(\mathbf{n}, \tau) = 0. \tag{32}$$

Вектор

$$\mathbf{b} = [\tau, \mathbf{n}] \tag{33}$$

в силу свойств векторного произведения единичный и ортогонален к τ и $\mathbf{n}$ определяет бинормаль к траектории. Вектора τ, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ являются ортами так называемой естественной системы координат.

Рис. 1: Орты естественного трехгранника



Радиус кривизны Радиус кривизны определяется как отношение приращения длины дуги ds к $d\alpha$- углу между $\tau(t)$ и $\tau(t+dt)$:

$$R = \frac{ds}{d\alpha} \tag{34}$$

Радиус кривизны и кривизна связаны соотношением

$$R = \frac{1}{k}. \tag{35}$$

Действительно, согласно рисунку 2

$|d\tau| = |\tau| \sin d\alpha = d\alpha$. Далее, согласно ур. (29)

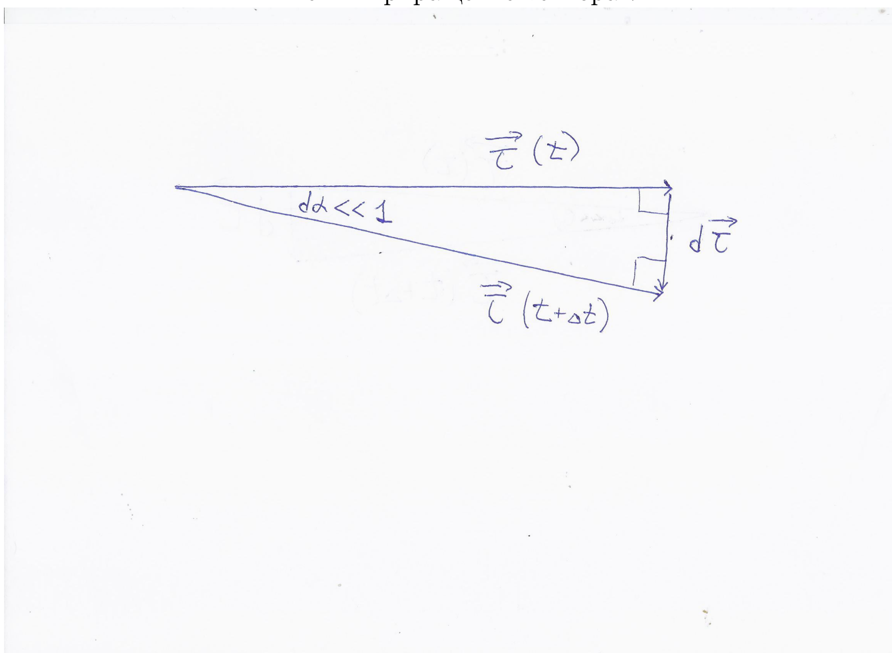
$$k = |\frac{d\tau}{ds}| = \frac{|d\tau|}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} \tag{36}$$

Скорость, ускорение и их проекции на оси естественного трехгранника.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\tau. \tag{37}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{v}\tau + v\frac{d\tau}{dt} = \dot{v}\tau + v\frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{v}\tau + v^2 k\mathbf{n} \tag{38}$$

Рис. 2: Приращение вектора τ



Формулы Френе Рассмотрим производную

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = [\frac{d\tau}{ds}, \mathbf{n}] + [\tau, \frac{d\mathbf{n}}{ds}] = \chi\mathbf{n}, \tag{39}$$

где χ - кручение (вторая кривизна). В отличие от k χ может принимать как положительные так и отрицательные значения. Для плоского движения $\chi = 0$, так как $\mathbf{b} = \text{const}$.

Согласно рис. 1 $\mathbf{n} = -[\tau, \mathbf{b}]$. Рассмотрим производную

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -[\frac{d\tau}{ds}, \mathbf{b}] - [\tau, \frac{d\mathbf{b}}{ds}] = -k[\mathbf{n}, \mathbf{b}] - \chi[\tau, \mathbf{n}] = -k\tau - \chi\mathbf{b} \tag{40}$$

Уравнения (29,39,40) называются формулами Френе.

3 Второй закон Ньютона. Импульс. Понятие силы. Масса инертная и гравитационная. Момент импульса. Секторная скорость. Момент силы. Теоремы сохранения импульса и момента импульса.

Динамика изучает движение как результат действия сил.

Рассмотрим движение свободной материальной точки (МТ) относительно некоторой (необязательно инерциальной) системы отсчета. Затем повторим опыт с теми же начальными координатами и скоростью МТ, но в присутствие некоторого тела. Результаты опыта показывают, что по сравнению с первым опытом МТ приобрела некоторое *дополнительное* ускорение. Таким образом мы приходим к понятию силы. Под **силой** с которой тело действует на МТ понимают такое влияние тела на МТ в результате которого МТ приобретает дополнительное ускорение $\Delta \mathbf{a}$, исчезающее при удалении тела на бесконечное расстояние. Поскольку ускорение векторная величина, то и сила ($\mathbf{F}$) является векторной величиной сонаправленной ускорению.

Повторим опыт в присутствии тел 1, 2 и их одновременном присутствии. Оказывается, что для соответствующих дополнительных ускорение $\Delta \mathbf{a}^1$, $\Delta \mathbf{a}^2$ и $\Delta \mathbf{a}^{1,2}$ справедливо равенство

$$\Delta \mathbf{a}^{1,2} = \Delta \mathbf{a}^1 + \Delta \mathbf{a}^2, \tag{41}$$

из которого следует соответствующее равенство для сил

$$\mathbf{F}^{1,2} = \mathbf{F}^1 + \mathbf{F}^2, \tag{42}$$

справедливое и для произвольного числа тел влияющих на материальную точку:

$$\Delta \mathbf{a} \equiv \Delta \mathbf{a}^{1,\ldots,n} = \sum_i^n \Delta \mathbf{a}^i, \tag{43}$$

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}^{1,\ldots,n} = \sum_i^n \mathbf{F}^i. \tag{44}$$

Равенства (42) и (44) показывают, что суммарная сила может оказаться равной нулю. Это обстоятельство можно использовать для измерения сил.

На основании опыта оказывается, что отношение силы F к приобретенному МТ дополнительному ускорению Δa есть величина постоянная для данной точки

$$\frac{F}{\Delta a} = m = \text{const}. \tag{45}$$

Величина m называется инертной массой материальной точки. Массу можно определить и из закона всемирного тяготения (подробнее в след. лекциях) из которого можно получить, что вес тела на поверхности земли равняется $\tilde{m}g$, где g - ускорение свободного падения, $\tilde{m}$ - гравитационная масса. На опыте с большой точностью установлено, что $m = \tilde{m}$.

Из уравнений (43-45) для инерциальных систем отсчета, в которых тело при отсутствии действующих на него сил движется прямолинейно и равномерно получаем уравнение

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{46}$$

Уравнение (46) есть второй закон Ньютона. Это уравнение является основой динамики МТ. Уравнение (46) можно переписать в виде

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}, \tag{47}$$

где

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} \tag{48}$$

есть импульс (момент количества движения) МТ. Величина

$$\mathbf{L} \equiv [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = m[\mathbf{r}, \mathbf{v}] \tag{49}$$

называется моментом импульса МТ. Найдем закон движения для **L**. Дифференцируя равенство (11), с учетом (108) получаем

$$\dot{\mathbf{L}} = [\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}] + [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{p}}] = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] \equiv \mathbf{N}, \tag{50}$$

где **N** есть момент силы действующий на МТ.

Уравнение (108) показывает, что если на МТ не действует сила, то импульс МТ сохраняется. Уравнение (50) показывает, что если момент силы действующей на МТ равен нулю, то момент импульса МТ сохраняется. Для **L** справедливо равенство

$$\mathbf{L} = 2m\sigma, \tag{51}$$

где

$$\sigma = 1/2[\mathbf{r}, \mathbf{v}] \tag{52}$$

так называемая секторная скорость. Модуль секторной скорости равняется изменению площади описываемой радиус-вектором. Действительно

$$|\sigma| = 1/2|[\mathbf{r}, \mathbf{v}]| = 1/2|\frac{1}{dt}[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]| = \dot{S} \tag{53}$$

4 Прямая и обратная задача механики. Интегрирование уравнений движения. Первые и вторые интегралы движения. Условия независимости интегралов движения. Примеры: случаи, когда сила равна нулю и когда момент силы равен нулю.

Прямая и обратная задача механики. Применяя второй закон Ньютона (46) к системе материальных точек получим систему уравнений

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, i = 1, \ldots, N, \tag{54}$$

где N-число МТ в системе, силу $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_N)$ в общем случае будем считать зависящей от положения и скоростей МТ, подстрочный индекс нумерует МТ. С математической точки зрения (54) есть система $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Вообще дифференциальным уравнением называют уравнения которые содержат производные неизвестной (или неизвестных) функций. Вместо производных могут входить дифференциалы. Обыкновенные дифференциальные уравнения содержат производные только по одной переменной (в уравнении Ньютона это время). Если от нескольких, то это дифференциальные уравнения в частных производных. В ближайших лекциях мы будем иметь дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассмотрим для примера уравнение

$$\ddot{x} + x = 0. \tag{55}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Функция $\sin t$ является решением уравнения (55) (обращает его в тождество), Функция $2\cos t$ - также является решением. Существует бесконечно много решений ур. (55). В математике доказывается (при условиях которые мы будем считать выполненными), что для обыкновенного дифф. уравнения второго порядка существует *единственное* решение удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} x(t = t_0) &= x_0 \\ \dot{x}(t = t_0) &= \dot{x}_0. \end{aligned} \tag{56}$$

Решения удовлетворяющие условиям (56) называются частными решениями. Например $\sin t$, $2\cos t$ - частные решения (55). Совокупность всех частных решений образует общее решение. Его стараются записать в виде $x(t, C1, C2)$, где $C1, C2$ произвольные *независимые* постоянные. Задавая конкретные значения для $C1, C2$ получаем частные решения. Независимость $C1, C2$ означает, что для любых x_0 и $\dot{x}_0$ можно найти значения $C1, C2$ для формирования соответствующего частного решения. Для уравнения (55) общим решением будет

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t = C \cos(t + \phi_0). \tag{57}$$

Уравнения (54) представляют из себя систему дифференциальных уравнений второго порядка. Всегда можно найти *единственное* частное решение решение удовлетворяющее $6N$ условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(t = t_0) &= \mathbf{r}_{i0}, \\ \dot{\mathbf{r}}_i(t = t_0) &= \dot{\mathbf{r}}_{i0}, \\ i &= 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{58}$$

Задача нахождения решений уравнений (54) при заданных силах $\mathbf{F}_i$ и начальных условиях (58) называется *обратной задачей механики.* Данная задача представляет наибольший интерес.

Общим решением будет совокупность всех частных решений. Его стараются записать в виде

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, C1 \ldots C_{6N}), \tag{59}$$

где $C1, \ldots, C_{6N}$ произвольные *независимые* постоянные. Выражая произвольные постоянные через начальные координаты и скорости общее решение можно записать в виде

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, t_0, \mathbf{r}_{10} \ldots \mathbf{r}_{N0}, \mathbf{v}_{10} \ldots \mathbf{v}_{N0}). \tag{60}$$

Прямая задача механики, это задача нахождения сил по заданному закону движения $\mathbf{r}_i(t)$. Это задача решается путем подставления второй производной $\ddot{\mathbf{r}}_i(t)$ в уравнения (54).

Интегрирование уравнений движения. Первые и вторые интегралы движения. Условия независимости интегралов движения. Примеры: случаи, когда сила равна нулю и когда момент силы равен нулю. Рассмотрим систему уравнений Ньютона

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \\ \ddot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \\ \ddot{x}_3 = F_3(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \end{cases} \tag{61}$$

для одной частицы. Выполняя одно интегрирование по времени получаем

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) = C_1 \\ \phi_2(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) = C_2 \\ \phi_3(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) = C_3, \end{cases} \tag{62}$$

где C_i - постоянные интегрирования. Уравнения (62) показывают, что функции ϕ_i остаются постоянными в процессе движения. *Первыми интегралами движения* называются такие функции координат, скоростей и времени, которые в процессе движения остаются постоянными. Их значения зависят от начальных условий. Таким образом, ϕ_i являются *первыми* интегралами движения. Например рассмотренные ранее импульс и момент импульса будут первыми интегралами движения если сила или момент силы соответственно будут равны нулю.

Первые три интеграла будут независимыми если система уравнений (62) позволяет выразить скорости через координаты время и произвольные постоянные. Условием этого является отличие от нуля функционального определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{63}$$

Рассмотрим пример для импульса и момента импульса. Для импульса имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1}{\partial x_2} & \frac{\partial p_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_2}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2}{\partial x_2} & \frac{\partial p_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_3}{\partial x_1} & \frac{\partial p_3}{\partial x_2} & \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3 \neq 0. \tag{64}$$

Для момента импульса

$$\begin{cases} L_1 = m(x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2) \\ L_2 = m(x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3) \\ L_3 = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) \end{cases} \tag{65}$$

получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x_1} & \frac{\partial L_1}{\partial x_2} & \frac{\partial L_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2}{\partial L_2} & \frac{\partial L_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x_1} & \frac{\partial L_3}{\partial x_2} & \frac{\partial L_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -mx_3 & mx_2 \\ mx_3 & m & -mx_1 \\ -mx_2 & mx_1 & 0 \end{vmatrix} = m^3x_1x_2x_3 - m^3x_1x_2x_3 = 0. \tag{66}$$

Таким образом три компоненты импульса являются независимыми интегралами движения, а три компоненты момента импульса нет (только две компоненты являются независимыми).

Производя второе интегрирование в системе (62) получаем систему

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, C_1, C_2, C_3, t) = C_4 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, C_1, C_2, C_3, t) = C_5 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3, C_1, C_2, C_3, t) = C_6. \end{cases} \tag{67}$$

Вторыми интегралами движения называются такие функции координат времени и произвольных констант, которые в процессе движения остаются постоянными. Таким образом φ_i являются вторыми интегралами движения. Первые три интеграла будут независимыми если система уравнений (67) позволяет выразить координаты через произвольные постоянные и время. Аналогично случаю первых интегралов, условием этого является отличие от нуля функционального определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{68}$$

В случае независимых интегралов, разрешая систему (67) получаем общее решение

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ x_2 = x_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ x_3 = x_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \tag{69}$$

Рассмотрим для примера далее случай $\mathbf{F} = 0$. В этом случае система (62) для импульса имеет вид

$$\begin{cases} m\dot{x}_1 = C_1 \\ m\dot{x}_2 = C_2 \\ m\dot{x}_3 = C_3. \end{cases} \tag{70}$$

Интегрируя ее получаем

$$\begin{cases} x_1 - \frac{C_1}{m}t = C_4 \\ x_2 - \frac{C_2}{m}t = C_5 \\ x_3 - \frac{C_3}{m}t = C_6. \end{cases} \tag{71}$$

Вторые интегралы $\varphi_i = x_i - \frac{C_i}{m}t$ являются независимыми так как

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \tag{72}$$

Для случая $\mathbf{N} = 0$ один из вторых интегралов можно найти без интегрирования. Действительно

$$(\mathbf{r}, \mathbf{L}) = m(\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]) = 0. \tag{73}$$

Тогда

$$(\mathbf{r}, \mathbf{L}) = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3 = x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 = 0. \tag{74}$$

Движение происходит в плоскости проходящей через начало координат перпендикулярно $\mathbf{L}$.

5 Работа силы. Кинетическая энергия. Консервативные силы и потенциальная энергия. Закон сохранения энергии. Консервативность центральной силы.

Элементарной работой силы $\mathbf{F}$ при перемещении $d\mathbf{r}$ называется величина

$$\delta A = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) \equiv \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{75}$$

Вычислим работу за конечное перемещение из положения 1 в положение 2. Интегрируя ур. (75), получаем

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \int_1^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \int_1^2 \mathbf{v} d\mathbf{v} = m \int_1^2 v dv = \frac{m}{2} \int_1^2 dv^2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{76}$$

Величина

$$T \equiv \frac{mv^2}{2} \tag{77}$$

называется кинетической энергией МТ. Таким образом получаем, что работа силы действующей на МТ равна изменению кинетической энергии МТ:

$$A_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T. \tag{78}$$

Рассмотрим подробнее выражение для работы

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 F_x dx + \int_1^2 F_y dy + \int_1^2 F_z dz$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(F_x\left(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t\right)\dot{x}(t) + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}\right) dt \tag{79}$$

при конечном перемещении. Выражение (79) показывает, что в общем случае работа силы при перемещении из положения 1 в положение 2 зависит от закона движения (функций x(t),y(t),z(t)) МТ. Сила называется *консервативной* (или *потенциальной*) если ее работа не зависит от пути или, что тоже самое работа при перемещении по любому замкнутому контуру равна нулю. Для этого достаточно, чтобы сила представлялась в виде градиента (с минусом, для удобства) некоторой функции $U(\mathbf{r})$ положения точки. Действительно, пусть

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\ U(\mathbf{r}) \equiv -\frac{dU(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} \equiv -\vec{\nabla}U(\mathbf{r}) \equiv$$

$$-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{80}$$

Тогда работа

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_1^2 \frac{dU(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} =$$

$$-\int_1^2 \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}dz =$$

$$-\int_1^2 dU = U_1 - U_2 \tag{81}$$

не зависит от пути. В математике доказывается и необходимость условия (80). Ур. (78,81) дают

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = const \tag{82}$$

Величина

$$E = T + U \tag{83}$$

называется полной энергией МТ. Таким образом, получаем, что при движении МТ под действием консервативной силы сохраняется полная энергия

МТ. В этом случае полная энергия удовлетворяет определению первого интеграла.

Рассмотрим нестационарную потенциальную силу

$$\mathbf{F} = -\frac{dU(\mathbf{r}, \mathbf{t})}{d\mathbf{r}}. \tag{84}$$

В этом случае работа

$$\begin{gathered} A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_1^2 \frac{dU(\mathbf{r}, t)}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \\ -\int_1^2 \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial y} dy + \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial z} dz = \\ -\int_1^2 \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial y} dy + \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial z} dz + \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} dt + \int_1^2 \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} dt = \\ -\int_1^2 dU + \int_1^2 \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} dt = U_1 - U_2 + \int_1^2 \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} dt \end{gathered} \tag{85}$$

зависит от пути.

Одномерное движение с консервативной силой. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{86}$$

системы с одной степенью свободы с консервативной силой интегрируются в общем виде с использованием интеграла энергии

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x). \tag{87}$$

Действительно, из ур. (87) имеем

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}, \tag{88}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + C. \tag{89}$$

Общее решение (89) содержит две произвольные постоянные E и C. Поскольку кинетическая энергия - положительная величина, то движение происходит только в областях где

$$U(x) < E, \tag{90}$$

рис. **??**. Точки x_i в которых $U(x_i) =$ Е являются точками остановки ограничивающими движение. Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение является финитным (происходит в ограниченной области пространства). Одномерное ограниченное движение всегда периодическое. Согласно (89)

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \tag{91}$$

Центральная сила. *сила это такая сила, величина которой зависит только от расстояния между МТ и некоторой точкой (называемой центром силы) и направлена вдоль прямой соединяющей центр силы и МТ.* Если поместить начало отсчета в центр силы, тогда центральную силу можно представить в виде

$$\mathbf{F}^c = F(r)\mathbf{e}_r, \tag{92}$$

где $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ - единичный вектор сонаправленный с радиус-вектором. Центральная сила является консервативной. Действительно, работа при перемещении из положения 1 в 2

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}^c \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 F(r)\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 F(r)dr = U(r_1) - U(r_2),$$

где

$$U(r) = -\int_1^2 F(r) \cdot dr + C. \tag{93}$$

С учетом равенства

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{x}{r} \tag{94}$$

можно непосредственно убедиться, что $U(r)$ из ур. (93) является потенциалом для центральной силы (92). Из математики известно, что для того чтобы сила была потенциальной необходимо и достаточно, чтобы ротор силы равнялся нулю. Нетрудно показать, что для центральной силы (92)

$$rot F(r)\mathbf{e}_r \equiv [\vec{\nabla}, F(r)\mathbf{e}_r] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F(r)\frac{x}{r} & F(r)\frac{y}{r} & F(r)\frac{z}{r} \end{vmatrix} = 0 \tag{95}$$

6 Движение материальной точки в центральном поле. Первые интегралы движения. Плоскость орбиты. Полярные координаты. Вторые интегралы. Уравнение траектории.

Как мы уже знаем при движении в поле центральной силы сохраняются момент количества движения и полная энергия (четыре первых интеграла, три из которых независимы) МТ. Есть также три независимых вторых интеграла. Один из них нам уже известен (см. ур. (74)), представляет уравнение плоскости проходящей через начало координат (начало системы отсчета помещено в центр силы) перпендикулярно вектору момента количества движения. Воспользуемся данными интегралами для нахождения траектории и закона движения МТ. Траектории при движении в поле центральной силы называют орбитами.

Ориентируем систему координат таким образом, чтобы движение происходило в плоскости xy (ось z сонаправлена с моментом количества движения $\mathbf{L}$). Вводя в плоскости xy полярные координаты получим

$$L = mr^2\dot{\varphi} = const, \tag{96}$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = const. \tag{97}$$

Выражая $\dot{\varphi}$ из ур. 96 и подставляя в 97 получаем

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = const. \tag{98}$$

Здесь $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ - эффективная потенциальная энергия, слагаемое $\frac{L^2}{2mr^2}$ называется центробежной энергией. Уравнение (98) эквивалентно (87) с заменой $U(r) \to U_{\text{eff}}(r)$. Поступая аналогично выводу ур. (89) получаем

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}, \tag{99}$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} + C = \pm\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} + C. \tag{100}$$

Из ур. (100) можно найти $r(t)$. Зная зависимость $r(t)$, с помощью ур. (96) находим

$$\varphi = \frac{L}{m}\int\frac{dt}{r(t)^2} + C. \tag{101}$$

Таким образом, задача решена, функции $r(t), \varphi(t)$ найдены. С помощью ур. (96,99) можно получить уравнение траектории:

$$\varphi = \pm\int\frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} + C. \tag{102}$$

Знак в уравнениях (99, 100, 102) определяется начальными условиями. Три независимых вторых интеграла (74, 100, 101) определяют общее решение. Вместо одно из интегралов (100 или 101) можно взять (102).

7 Возможные траектории движения материальной точки в центральном поле. Финитное и инфинитное движение. Падение на центр. Условие замкнутости траектории.

Мы получили законы движения (74, 100, 101) МТ в центральном поле. Проанализируем полученные уравнения.

- Движение происходит в неподвижной плоскости, проходящей через центр силы перпендикулярно моменту количества движения (см. (74)).
- Радиус-вектор точки описывает равные площади за равные промежутки времени (в силу сохранения секторной скорости).
- Угол φ всегда меняется монотонным образом (см. 96).
- Движение возможно только в области $E \geq U_{\text{eff}}(r)$
- Точки $E = U_{\text{eff}}(r_i)$ определяют границы движения, в них $\dot{r} = 0$. При достижении точки поворота $r(t), r(\varphi)$ переходит от увеличения к уменьшению или наоборот (меняется знак в уравнениях (99, 100, 102)). Мы видели, что закон движения по радиальной переменной можно рассматривать как одномерное движение. Однако, в отличие от истинного одномерного движения МТ в точках поворота не останавливается, т.к. всегда есть движение по угловой переменной.
- Траектория МТ в центральном поле симметрична относительно апсид. Апсиды это прямые проходящие через центр силы и точки поворота. Действительно, если отсчитывать угол от апсиды, то согласно (102)
$$\varphi(r) = \pm \int_{r_{min}(r_{max})}^{r} \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}, \tag{103}$$
где знаки $\pm$ соответствуют углу точек орбиты по разные стороны от апсиды. Таким образом, при данном r, угол для точек орбиты по разные стороны от апсиды отличается только знаком, что и означает симметричность траектории относительно апсид. Это свойство симметрии позволяет построить всю траектории зная лишь участок между двумя апсидами.
- Если область движения ограничена лишь условием $r \geq r_{min}$, то движение инфинитно, МТ приходит из бесконечности и уходит на бесконечность. Если есть две границы r_{min} и r_{max}, то движение финитно. Траектория лежит внутри кольца ограниченного окружностями r_{min} и r_{max}. Иногда возможен случай $r_{min} = 0$, в этом случае говорят о падении МТ на центр. Определим условие такого события. Из неравенства
$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \geq 0 \tag{104}$$
получаем
$$r^2 U(r) + \frac{L^2}{2m} \leq E r^2. \tag{105}$$
Перейдем к пределу $r \to 0$:
$$\lim_{r \to 0} r^2 U(r) \leq -\frac{L^2}{2m}. \tag{106}$$

Для выполнения условия (106) $U(r)$ должно стремиться к $-\infty$ как $-\alpha/r^2$ с $\alpha \geq \frac{L^2}{2m}$ или как $-1/r^n$ с $n > 2$.

- В случае одномерного движения финитное движение всегда периодично. В случае центрального поля это,вообще говоря, не так. Здесь есть еще движение по угловой переменной и траектория может быть незамкнутой и за бесконечное время заполнить все пространство между двумя граничными окружностями. Ясно, чтобы траектория была замкнутая, то за некоторое целое число циклов движения точки от r_{min} до r_{max} и обратно угол φ должен измениться на угол кратный 2π. Это значит, что точка вернулась в исходное положение и траектория замкнулась. Это значит, что

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} = \frac{m}{n}2\pi, \qquad (107)$$

где m, n - целые числа.

8 Задача Кеплера. Сведение задачи двух тел к движению материальной точки в центральном поле. Закон всемирного тяготения Ньютона.

Рассмотрим систему уравнений Ньютона для двух МТ:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}. \end{cases} \qquad (108)$$

Введем новые переменные

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad (109)$$

и

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (110)$$

Согласно третьему закону Ньютона

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \equiv \mathbf{F}. \qquad (111)$$

Тогда для $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ справедливы уравнения движения

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}} = 0 \\ \ddot{\mathbf{r}} = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})\mathbf{F}. \end{cases} \qquad (112)$$

Первое из уравнений говорит, что центр масс двух изолированных МТ движется прямолинейно и равномерно. Второе можно переписать в виде

$$\mathbf{F} = \mu \ddot{\mathbf{r}}, \tag{113}$$

где

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{114}$$

так называемая приведенная масса.

Согласно третьему закону Ньютона силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены, и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки. Если предположить, что сила взаимодействия зависит только от расстояния между МТ, то положение первой МТ будет центром силы для второй и наоборот. В этом случае сила в уравнении (113) будет центральной. Так как первое из уравнений в системе (112) тривиально, то фактически задача о движении двух изолированных МТ сводится к движению одной точки (ур. 113) с массой μ в центральном поле.

Зная законы движения для $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ можно получить законы движения

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R} \\ \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R} \end{cases} \tag{115}$$

для $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Для примера в законе всемирного тяготения

$$\mathbf{F} = -\mathbf{r} G \frac{m_1 m_2}{r^3}, \tag{116}$$

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \alpha = G m_1 m_2, \tag{117}$$

где $G = 6.67$ м^{3}с$^{-2}$кг$^{-1}$.

В случае если $m_2 \gg m_1$, то $\mu \approx m_1$. Действительно

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{1 + m_1/m_2} \approx m_1. \tag{118}$$

Интеграл Лапласа. Для МТ, движущейся в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, сохраняется вектор

$$\mathbf{C} = [\mathbf{v}, \mathbf{L}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} = const. \tag{119}$$

Действительно,

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = [\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{L}] - \frac{d}{dt}\frac{\alpha \mathbf{r}}{r} = [\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{L}] - \frac{\alpha \dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\alpha \dot{r} \mathbf{r}}{r^2} = [-\frac{\alpha \mathbf{r}}{m r^3}, \mathbf{L}] - \frac{\alpha \dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\alpha \dot{r} \mathbf{r}}{r^2} =$$
$$\left[-\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3}, [\mathbf{r}, \mathbf{v}]\right] - \frac{\alpha \dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\alpha \dot{r} \mathbf{r}}{r^2} = -\frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{v})}{r^3} + \frac{\alpha \mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{r})}{r^3} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{v})}{r^3} - \frac{\alpha \dot{\mathbf{r}}}{r} = 0. \tag{120}$$

При выводе ур. (120) мы использовали, что

$$m\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\left(-\frac{\alpha}{r}\right) = \frac{d(\alpha/r)}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r} \qquad (121)$$

и

$$\dot{r} = \frac{d\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{dt} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(\mathbf{r},\mathbf{v})}{r}. \qquad (122)$$

9 Общее исследование возможных траекторий в случае ньютоновского потенциала. Уравнения траекторий в канонической форме. Эксцентриситет. Типы орбит.

Воспользуемся уравнением (102) для нахождения орбиты МТ, движущейся в поле $U(r) = \mp\frac{\alpha}{r}$:

$$\pm(\varphi + C) = \int \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2mE \pm \frac{2m\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2}}} = -\int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} \pm \frac{2m\alpha}{L^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}} =$$

$$-\int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4} - \left(\frac{1}{r} \mp \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p}\right)^2}} =$$

$$\arccos\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p}\right) = \arccos\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{r} \mp 1\right), \qquad (123)$$

где мы обозначили

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} \qquad (124)$$

есть параметр, и

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \qquad (125)$$

есть эксцентриситет орбиты. Параметр и эксцентриситет определяют линейные размеры и тип орбиты (см. ниже). Взяв косинус от левой и правой части уравнения (123) и ориентируя систему координат так, чтобы положить $C = 0$ получаем канонические уравнения орбиты

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi \qquad (126)$$

и

$$\frac{p}{r} = -1 + \varepsilon\cos\varphi \qquad (127)$$

для случая притяжения и отталкивания соответственно. Согласно аналитической геометрии (126) и (127) есть уравнения конического сечения с фокусом в начале координат. $\varepsilon = 0$ соответствует окружности, $0 < \varepsilon < 1$ - эллипсу, $\varepsilon = 1$ - параболе, $\varepsilon > 1$ - гиперболе. Согласно ур. (125) для окружности и эллипса должно быть $E < 0$, для параболы $E = 0$ и для гиперболы $E > 0$. В случае потенциала отталкивания $\frac{\alpha}{r}$ возможно только $E > 0$ и движение происходит по гиперболе. Параметр p равняется половине длины фокальной хорды.

Выпишем полезные формулы из аналитической геометрии.

- $\varepsilon = 0$ - движение по окружности.

$$r_{\min} = r_{\max} = p, \tag{128}$$

  где $r_{\min}$ и $r_{\max}$ минимальное и максимальное расстояние до центра силы соответственно. Движение происходит по окружности радиуса p.

- $0 < \varepsilon < 1$ - движение по эллиптической орбите.

$$r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}, \tag{129}$$

$$r_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon}, \tag{130}$$

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \tag{131}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{132}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1, \tag{133}$$

  где a и b большая и малая полуоси эллипса соответственно, c - расстояние между фокусами, $c^2 = a^2 - b^2$.

- $\varepsilon = 1$ - движение по параболе.

$$r_{\min} = \frac{p}{2}, \tag{134}$$

- $\varepsilon > 1$ - движение по гиперболе.

$$r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}, \tag{135}$$

  для потенциала притяжения и

$$r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon - 1}, \tag{136}$$

  для потенциала отталкивания. В случае потенциала притяжение движение происходит по ветви гиперболы огибающей центр силы, а в случае отталкивания по ветви проходящей мимо центра поля.

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \tag{137}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \tag{138}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1, \tag{139}$$

где a и b действительная и мнимая полуоси гиперболы соответственно, c - расстояние между фокусами, $c^2 = a^2 + b^2$.

10 Законы Кеплера.

Вычислим период обращения, T в поле ньтоновского потенциала

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}. \tag{140}$$

Из закона сохранения получаем

$$T = 2\pi \frac{abm}{L} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}, \tag{141}$$

Где с учетом равенств (124, 125, 131,132) мы использовали, что

$$a = \frac{L^2}{m\alpha} \frac{1}{-\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = -\frac{\alpha}{2E} = \frac{\alpha}{2|E|}, \tag{142}$$

$$b = \frac{L^2}{m\alpha} \frac{1}{\sqrt{-\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} = \left(\frac{a}{m\alpha}\right)^{1/2} L. \tag{143}$$

Теперь мы можем сформулировать законы Кеплера о движении планет вокруг Солнца.

- Планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам в одном из фокусов которого находится Солнце (следует из уравнения траектории 126).

- Секторная скорость при движении сохраняется или радиус-вектор описывает равные площади за равные промежутки времени. Это общее свойство для движения в центральном поле.

- Отношение квадратов периодов обращения планет вокруг Солнца к кубам больших полуосей их орбит для всех планет одинаково. Действительно, из ур. (117,141) получаем

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{m}{GmM} = \frac{4\pi^2}{GM}, \tag{144}$$

где m, M - массы планеты и Солнца соответственно. Этот закон выполняется только приближенно. Согласно (113,114) ур. (141) должна стоять не масса планеты, а приведенная масса системы планета-Солнце. Поэтому более точно

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{\frac{mM}{m+M}}{GmM} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}. \tag{145}$$

11 Рассеяние частиц неподвижным силовым центром. Прицельное расстояние (параметр удара). Угол рассеяния. Дифференциальное сечение рассеяния.

В задачах о рассеянии на силовой центр из бесконечности падает однородный пучок частиц, каждая частица на бесконечности имеет одинаковую скорость $\mathbf{v}_\infty$. В общем случае измеряется число событий происходящих в единицу времени вызванных взаимодействием частиц с рассеивающим центром. В нашем случае взаимодействие частиц с рассеивающим центром приводит к тому, что направление движение частиц приходящих из бесконечности (совпадает с $\mathbf{v}_\infty$) и ушедших на бесконечность различаются. *Углом рассеяния* χ называют угол между начальным и конечным направлением движения частицы. В общем случае он получается разным для разных частиц. Нас будет интересовать число частиц рассеянных в единицу времени в интервал углов χ и $\chi+d\chi$. Для решения данной задачи найдем сначала угол рассеяния одной частицы. Как было показано ранее, траектория частицы в центральном поле симметрична относительно апсид. Поэтому согласно рисунку 4 для угла рассеяния получаем

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|, \tag{146}$$

где φ_0 есть угол между апсидой и асимптотой орбиты (мы не рассматриваем так называемые закрученные траектории). Согласно ур. (102)

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}. \tag{147}$$

Частицы в пучке различаются *прицельным расстоянием* ρ. Это расстояние на котором частица прошла бы мимо рассеивающего центра если бы они не взаимодействовали. Энергия частицы (одинаковая для всех частиц в пучке) и момент количества движения выражаются через скорость на бесконечности и прицельное расстояние огласно (см. рис. 5)

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \tag{148}$$

$$L = m\rho v_\infty, \tag{149}$$

а формула (147) принимает вид

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty}}}. \tag{150}$$

Различные частицы в пучке обладают различным прицельным расстоянием и согласно формуле (150) рассеиваются на различные углы.

Введем дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{dN}{j}, \tag{151}$$

где j-плотность потока частиц, dN- число частиц рассеянных в единицу времени в интервал углов от χ до $\chi + d\chi$. Будем считать, что связь между χ и ρ взаимно однозначна. В этом случае в заданный интервал углов от χ до $\chi + d\chi$ рассеиваются частицы с прицельным расстоянием от $\rho(\chi)$ до $\rho(\chi) + d\rho = \rho(\chi) + |\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}|d\chi$, рис. 6. Число таких частиц в единицу времени равно числу частиц прошедших в единицу времени через площадь кольца с радиусами от $\rho(\chi)$ до $\rho(\chi) + d\rho$. Таким образом $dN = 2\pi\rho d\rho \cdot j$ и согласно (151)

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi. \tag{152}$$

Ур. (152) можно переписать через элемент телесного угла $d\Omega = 2\pi\sin\chi d\chi$ между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$. В результате получаем

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\Omega. \tag{153}$$

12 Рассеяние заряженных частиц электрическим полем неподвижного заряда. Формула Резерфорда.

Рассмотрим задачу рассеяния двух частиц с зарядами одного знака Z_1 и Z_2. Потенциал $U(r) = \frac{\alpha}{r}$, $\alpha = Z_1 Z_2 > 0$. Согласно уравнению траектории (127) и ур. (146) имеем

$$\chi = \pi - 2\varphi_0, \tag{154}$$

где

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{155}$$

Из ур. (154) и (155) следует, что

$$\cos^2\varphi_0 = \cos^2\frac{\pi - \chi}{2} = \sin^2\frac{\chi}{2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \tag{156}$$

и

$$\cos^2\frac{\chi}{2} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2}. \tag{157}$$

Из. ур. (156, 157, 125, 148, 149) получаем

$$\mathrm{ctg}^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon^2 - 1 = \frac{2EL^2}{m\alpha^2} = \frac{m^2 v_\infty^4 \rho^2}{(Z_1 Z_2)^2} \tag{158}$$

и

$$\rho^2 = \frac{(Z_1 Z_2)^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}. \tag{159}$$

Наконец из ур. (153) получаем

$$d\sigma = \frac{1}{2\sin\chi}\left|\frac{d\rho^2}{d\chi}\right| d\Omega = \frac{1}{2\sin\chi}\frac{(Z_1 Z_2)^2}{m^2 v_\infty^4} 2\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\chi}{2}}\frac{1}{2}d\Omega = \frac{(Z_1 Z_2)^2}{4m^2 v_\infty^4}\frac{1}{\sin^4\frac{\chi}{2}}d\Omega. \tag{160}$$

Уравнение (160) называется формулой Резерфорда. Такой же результат получается для случая $\alpha = Z_1 Z_2 < 0$.

13 Упругие столкновения частиц. Углы рассеяния в лабораторной системе и их выражение через углы рассеяния в системе центра инерции.

Столкновение называется упругим, если оно не меняет внутреннего состояния частиц. При применении к такому столкновению закона сохранения энергии не нужно учитывать внутреннюю энергию частиц. Мы уже знаем (вопрос 8), что задача о движении двух частиц на которые не действуют внешние силы сводится к задаче о движении одной частицы с приведенной массой. Однако угол рассеяния χ (угол между начальным и конечным направлением $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$)) не совпадает с углами рассеяния частиц 1 (угол между начальным и конечным направлением $\mathbf{v}_1$) и 2 (угол между начальным и конечным направлением $\mathbf{v}_2$). Рассмотрим связь между этими углами.

Согласно ур. (115) для скоростей первой и второй МТ имеем

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v} + \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v} + \mathbf{V}, \end{cases} \tag{161}$$

где

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{162}$$

есть скорость центра масс. Проще всего столкновение выглядит в системе отсчета в которой $\mathbf{V} = 0$ (центр масс покоится) - "ц-система". Будем отмечать значения в ц-системе индексом "0":

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v} \\ \mathbf{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}. \end{cases} \tag{163}$$

Заметим, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20}. \tag{164}$$

Полный импульс

$$\mathbf{P}_0 = m\mathbf{v}_{10} + m\mathbf{v}_{20} = \mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0 \tag{165}$$

в ц-системе равен нулю. Будем отличать значения после столкновения штрихами. В силу закона сохранения импульса в ц-системе

$$\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}'_{10} + \mathbf{p}'_{20} = 0, \tag{166}$$

импульсы первой и второй частицы после столкновения остаются равными по величине и противоположными по направлению:

$$\mathbf{p}'_{10} = -\mathbf{p}'_{20}, \tag{167}$$

а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными их абсолютные значения. Действительно, в силу закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{p}_{10}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_{20}^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{p}_{10}'^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_{20}'^2}{2m_2} \Rightarrow \\ \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)\mathbf{p}_{10}^2 = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)\mathbf{p}_{10}'^2 \Rightarrow \\ \mathbf{p}_{10}^2 = \mathbf{p}_{10}'^2 \end{aligned} \tag{168}$$

и аналогично получаем $\mathbf{p}_{20}^2 = \mathbf{p}_{20}'^2$. Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^2 = (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20})^2 = \left(\frac{\mathbf{p}_{10}}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_{20}}{m_2}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{p}_{10}}{m_1} + \frac{\mathbf{p}_{10}}{m_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2 \mathbf{p}_{10}^2 = \\ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2 \mathbf{p}_{10}'^2 = \left(\frac{\mathbf{p}'_{10}}{m_1} - \frac{\mathbf{p}'_{20}}{m_2}\right)^2 = (\mathbf{v}'_{10} - \mathbf{v}'_{20})^2 = \mathbf{v}'^2 \end{aligned} \tag{169}$$

то есть модуль вектора $\mathbf{v}$ сохраняется.

Если теперь обозначить как $\mathbf{n}$ единичный вектор в направлении $\mathbf{v}'$, то для $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}'_{10}$, $\mathbf{v}'_{20}$, $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}'_2$ имеем

$$\mathbf{v}' = \mathbf{n}v, \tag{170}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{n}v \\ \mathbf{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{n}v, \end{cases} \tag{171}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{n}v + \mathbf{V} \\ \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{n}v + \mathbf{V}. \end{cases} \tag{172}$$

Направление вектора $\mathbf{n}$ зависит от закона взаимодействия частиц и начальных условий.

Умножив первое из равенств (172) на m_1, а второе на m_2 получаем

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1' = \mu v\mathbf{n} + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2) \\ \mathbf{p}_2' = -\mu v\mathbf{n} + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2). \end{cases} \tag{173}$$

Уравнение (173) удобно представить графически, рис. (7). Рассмотрим подробнее случай $\mathbf{v}_2 = 0$, рис. (8) (вторая частица до столкновения покоится). В этом случае вектор $\vec{OB}$ сонаправлен с вектором $\mathbf{v}$, а вектор $\vec{OC}$ по построению сонаправлен с вектором $\mathbf{v}'$. Таким образом $\angle COB$ совпадает с углом рассеяния χ в ц-системе. Далее, в случае $\mathbf{v}_2 = 0$ вектор $\vec{AO}$ сонаправлен с вектором $\mathbf{v}_1$, а вектор $\vec{AC}$ по построению сонаправлен с вектором $\mathbf{v}_1'$. Таким образом $\angle CAO$ совпадает с углом рассеяния θ_1 первой МТ в лабораторной системе. В случае когда вторая частица до столкновения покоилась определение угла рассеяния как угла между начальным и конечным направлением движения частицы не имеет смысла. В этом случае угол рассеяния определяют как как угол между начальным направлением движения первой частицы (направление удара) и конечным направлением движения второй частицы. Соответствующие направления совпадают с направлениями векторов $\vec{AO}$ и $\vec{CB}$ и угол рассеяния θ_2 второй частицы совпадает с $\angle OBC$. Из рис. (8) видно, что

$$\begin{gathered} \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{CD}{AD} = \frac{CD}{AO+OD} = \frac{OC\sin\chi}{AO+OC\cos\chi} = \\ \frac{\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v\sin\chi}{\frac{m_1m_1}{m_1+m_2}v + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v\cos\chi} = \frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}. \end{gathered} \tag{174}$$

Заметим, что в случае $m_1 = m_2$

$$\begin{gathered} tg\theta_1 = \frac{\sin\chi}{1+\cos\chi} = \frac{2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}}{2\cos^2\frac{\chi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\chi}{2} \Rightarrow \\ \theta_1 = \frac{\chi}{2}. \end{gathered} \tag{175}$$

Так как треугольник COB равнобедренный, то

$$\theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}. \tag{176}$$

Заметим, что в случае $m_1 = m_2$, с учетом уравнений (175,176), частицы разлетаются под прямым углом (кроме случая лобового удара).

14 Динамика системы материальных точек. Третий закон Ньютона. Силы внешние и внутренние. Движение центра инерции. Импульс и момент импульса системы, законы их сохранения.

Центром масс системы МТ называется МТ, которая обладает массой всей системы и положение которой определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}, \tag{177}$$

где $\mathbf{r}_i$ - радиус-вектор i-ой точки,

$$M = \sum_i m_i \tag{178}$$

есть масса всей системы. Дифференцируя равенство (177), для скорости центра масс $\mathbf{V}$ получаем

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M}. \tag{179}$$

Далее для ускорения центра масс $\mathbf{a}$ получаем

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{V}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{M}. \tag{180}$$

Импульсом системы МТ $\mathbf{P}$ называется сумма импульсов МТ входящих в систему:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i, \tag{181}$$

где $\mathbf{p}_i$ - импульс i-ой МТ. Согласно уравнениям (181), (179) и (180) также получаем

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \tag{182}$$

и

$$\dot{\mathbf{P}} = M\mathbf{a}. \tag{183}$$

Согласно ур. (54,180) для полного импульса имеем закон движения

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}, \tag{184}$$

где

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{185}$$

есть суммарная (полная) сила действующая на систему МТ, $\mathbf{F}_i$ - сила действующая на i-ую МТ. Будем различать силы *внутренние* и *внешние*. Под внутренней силой ($\mathbf{F}_i^{in}$) понимают силу действующую на i-ую МТ со стороны других МТ входящих в систему. Под внешней силой ($\mathbf{F}_i^e$) понимают силу действующую на i-ую МТ со стороны тел не входящих в рассматриваемую систему МТ. Таким образом

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{in} + \mathbf{F}_i^e, \tag{186}$$

а внутреннюю силу можно записать в виде

$$\mathbf{F}_i^{in} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}, \tag{187}$$

где $\mathbf{F}_{ji}$ есть внутренняя сила, действующая на i-ую МТ со стороны j-ой. Согласно ур. (185, 186, 187) полную силу можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \sum_{i,j(i \neq j)} \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e. \tag{188}$$

Сумма всех внутренних сил равна нулю. Действительно

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{in} = \sum_{i,j(i \neq j)} \mathbf{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}) = 0, \tag{189}$$

так как $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij} = 0$ в силу третьего закона Ньютона. Таким образом ур. 184 переписывается в виде

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e, \tag{190}$$

где

$$\mathbf{F}^e = \sum_i \mathbf{F}_i^e \tag{191}$$

есть сумма всех внешних сил действующих на систему МТ. *Замкнутая* или *изолированная* система эта система не взаимодействующая с телами не входящими в систему. Для такой системы

$$\mathbf{F}_i^e = 0 \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{192}$$

и согласно ур. (190, 191)

$$\dot{\mathbf{P}} = 0. \tag{193}$$

Таким образом, импульс замкнутой системы МТ сохраняется.

Моментом импульса системы МТ $\mathbf{L}$ называется сумма моментов импульсов МТ входящих в систему:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i m_i \left[\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i \right]. \tag{194}$$

Согласно ур. (50), для момента импульса системы МТ получаем уравнение движения

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = \mathbf{N}^{in} + \mathbf{N}^e, \tag{195}$$

где

$$\mathbf{N} = \sum_i \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i\right], \tag{196}$$

$$\mathbf{N}^{in} = \sum_i \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{in}\right], \tag{197}$$

$$\mathbf{N}^{e} = \sum_i \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{e}\right], \tag{198}$$

есть сумма моментов сил, сумма моментов внутренних сил и сумма моментов внешних сил, действующих на систему. Сумма моментов внутренних сил равна нулю. Действительно

$$\mathbf{N}^{in} = \sum_i \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{in}\right] = \sum_{ij(i\neq j)} \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ji}\right] = \frac{1}{2}\sum_{ij(i\neq j)} \left(\left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ji}\right] + \left[\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ij}\right]\right) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{ij(i\neq j)} \left(\left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ji}\right] - \left[\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ji}\right]\right) = \frac{1}{2}\sum_{ij(i\neq j)} \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \mathbf{F}_{ji}\right] = 0, \tag{199}$$

где мы учли, что согласно третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ и $[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \mathbf{F}_{ji}] = 0$. С учетом (199) закон движения (195) приобретает вид.

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}^e. \tag{200}$$

Согласно (198), для замкнутой системы $\mathbf{N}^e = 0$, и таким образом момент импульса замкнутой системы МТ сохраняется.

15 Энергия системы материальных точек. Закон сохранения энергии.

Кинетическая энергия системы МТ определяется как сумма кинетических энергий отдельных МТ системы:

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{201}$$

Согласно ур. (75-77) изменение кинетической энергии равно

$$dT = \sum_i dT_i = \sum_i \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{in} d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{e} d\mathbf{r}_i. \tag{202}$$

В предыдущем разделе мы видели, что внутренние силы не меняют полный импульс и момент импульса системы МТ. Это не так для кинетической энергии. Действительно, рассмотрим

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{in} d\mathbf{r}_i = \sum_{ji(i\neq j)} \mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_i = \frac{1}{2}\sum_{ji(i\neq j)} \left(\mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_j\right) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{ji(i\neq j)} \left(\mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_i - \mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{ji(i\neq j)} \mathbf{F}_{ji}\left(d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j\right) \neq 0, \tag{203}$$

так как $d\mathbf{r}_i \neq d\mathbf{r}_j$ в общем случае. Будем считать, что внутренние и внешние силы можно представить в виде

$$\mathbf{F}_i^{in} = \mathbf{F}_i^{in,p} + \mathbf{F}_i^{in,d}, \tag{204}$$

где $\mathbf{F}_i^{in,p}$ и $\mathbf{F}_i^{in,d}$ есть внутренние потенциальные и диссипативные силы, действующие на i-ую частицу,

$$\mathbf{F}_i^{e} = \mathbf{F}_i^{e,p} + \mathbf{F}_i^{e,d} + \mathbf{F}_i^{e,g}, \tag{205}$$

где $\mathbf{F}_i^{e,p}$, $\mathbf{F}_i^{e,d}$ и $\mathbf{F}_i^{e,g}$ внешние потенциальные, диссипативные и гироскопические силы, действующие на i-ую частицу. Диссипативные силы - это силы, направленные в противоположную сторону скорости МТ, гироскопические силы - это силы направленные перпендикулярно скорости МТ.

Внутренние потенциальные силы можно представить в виде

$$\mathbf{F}_i^{in,p} = \sum_{j(i\neq j)} \mathbf{F}_{ji}^{p}, \tag{206}$$

где

$$\mathbf{F}_{ji}^{p} = -\nabla_i U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = -\nabla_i U_{ij}(r_{ij}), \quad U_{ij}(r_{ij}) = U_{ji}(r_{ij}), \tag{207}$$

есть внутренняя потенциальная сила, действующая со стороны j-ой МТ на i-ую, $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ есть растояние между i-ой и j-ой МТ,

$$\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y_i}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_i}\mathbf{e}_z \tag{208}$$

(ср. с ур. (80)). Аналогично ур. (94) получаем

$$\mathbf{F}_{ji}^{p} = -\nabla_i U_{ij}(r_{ij}) = -\frac{dU_{ij}(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}} \tag{209}$$

и

$$\mathbf{F}_{ij}^{p} = -\nabla_j U_{ji}(r_{ij}) = -\frac{dU_{ji}(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}}. \tag{210}$$

Таким образом, равенство $U_{ij}(r_{ij}) = U_{ji}(r_{ij})$ в определении (207) обеспечивает выполнение третьего закона Ньютона при взаимодействии i-ой и j-ой МТ.

Внешние потенциальные силы можно представить в виде

$$\mathbf{F}_i^{e,p} = -\nabla_i U_i(\mathbf{r}_i, t). \tag{211}$$

С учетом равенств (202, 204, 205) для изменения кинетической энергии имеем

$$dT = \sum_i \mathbf{F}_i^{in,p} d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{e,p} d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{d} d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{e,g} d\mathbf{r}_i, \tag{212}$$

где

$$\mathbf{F}_i^d = \mathbf{F}_i^{in,d} + \mathbf{F}_i^{e,d} \tag{213}$$

есть суммарная (внутренняя и внешняя) диссипативная сила, действующая на i-ую частицу. Рассмотрим каждое слагаемое в правой части равенства (212).

Последнее слагаемое в правой части равенства (212)

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{e,g} d\mathbf{r}_i = 0 \tag{214}$$

равно нулю, так как по определению гироскопической силы $\mathbf{F}_i^{e,g}$ она перпендикулярна скорости МТ, а следовательно и $d\mathbf{r}_i$.

Для первого слагаемого в правой части равенства (212), с учетом (206, 209) получаем (ср. с (81))

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{F}_i^{in,p} d\mathbf{r}_i = -\sum_{ij(i\neq j)} \nabla_i U_{ij}(r_{ij}) d\mathbf{r}_i = \\ -\frac{1}{2}\sum_{ij(i\neq j)} (\nabla_i U_{ij}(r_{ij}) d\mathbf{r}_i + \nabla_j U_{ij}(r_{ij}) d\mathbf{r}_j) = \\ -\frac{1}{2}\sum_{ij(i\neq j)} \frac{\partial U_{ij}(r_{ij})}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_{ij}(r_{ij})}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U_{ij}(r_{ij})}{\partial z_i} dz_i + \\ \frac{\partial U_{ij}(r_{ij})}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial U_{ij}(r_{ij})}{\partial y_j} dy_j + \frac{\partial U_{ij}(r_{ij})}{\partial z_j} dz_j = \\ -\frac{1}{2}\sum_{ij(i\neq j)} dU_{ij} = -\sum_{i<j} dU_{ij}\end{aligned} \tag{215}$$

Для второго слагаемого в правой части равенства (212), с учетом (211) получаем (ср. с (85))

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{F}_i^{e,p} d\mathbf{r}_i = -\sum_i \nabla_i U_i(\mathbf{r}_i, t) d\mathbf{r}_i = \\ -\sum_i \left(\frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i,t)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i,t)}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i,t)}{\partial z_i} dz_i\right) = \\ -\sum_i \left(\frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i,t)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i,t)}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i,t)}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i,t)}{\partial t} dt\right) \\ + \sum_i \frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i,t)}{\partial t} dt = \\ -d\sum_i U_i + \frac{\partial}{\partial t}\sum_i U_i(\mathbf{r}_i,t) dt\end{aligned} \tag{216}$$

С учетом (212, 214, 215, 216), для изменения кинетической энергии системы МТ получаем

$$dT = -dU + \frac{\partial U}{\partial t}dt + \sum_i \mathbf{F}_i^d d\mathbf{r}_i, \tag{217}$$

где

$$U \equiv \sum_{i<j} U_{ij}(r_{ij}) + \sum_i U_i(\mathbf{r}_i, t) \tag{218}$$

есть потенциальная энергия системы МТ. Величина

$$E \equiv T + U \tag{219}$$

называется полной энергией системы МТ. Согласно (217) уравнение движения для E имеет вид

$$dE = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \sum_i \mathbf{F}_i^d d\mathbf{r}_i, \tag{220}$$

или

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_i \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}_i. \tag{221}$$

Заметим, что так как диссипативная сила направлена в противоположную сторону скорости, то второе слагаемое в правой части равенства (221) всегда отрицательно. Если потенциальная энергия не зависит явно от времени и диссипативные силы отсутствуют, то согласно (221) полная энергия системы сохраняется.

16 Теорема вириала.

С учетом равенства (181) запишем удвоенную кинетическую энергию (201) в виде

$$2T = \sum_i \mathbf{p}_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \mathbf{p}_i \mathbf{r}_i\right) - \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \mathbf{r}_i. \tag{222}$$

Усредним равенство (222) по времени. По определению средним значением функции времени $f(t)$ является величина.

$$\bar{f} \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\infty f(t)dt. \tag{223}$$

Если $f(t)$ является производной по времени от ограниченной функции $F(t)$, то ее среднее значение обращается в нуль. Действительно

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \frac{dF}{dt}dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0. \tag{224}$$

Тогда, если система МТ совершает движение в конечной области пространства и со скоростями, не обращающимися в бесконечность, то первое слагаемое в правой части равенства 222 при усреднении по времени обращается в нуль. В этом случае, с учетом уравнений Ньютона (54), ур. (222) после усреднения перепишется в виде

$$2\bar{T} = -\sum_i \mathbf{r}_i \bar{\mathbf{F}}_i. \tag{225}$$

Величина $\sum_i \mathbf{r}_i \bar{\mathbf{F}}_i$ называется вириалом сил. Равенство (225) носит название теоремы вириала.

В случае потенциальных сил получаем

$$2\bar{T} = \sum_i \mathbf{r}_i \frac{\bar{\partial U}}{\partial \mathbf{r}}_i. \tag{226}$$

Функция $U^{(k)}$ называется однородной функцией степени k если

$$U^{(k)}(\alpha\mathbf{r}_1, \alpha\mathbf{r}_2, \ldots, \alpha\mathbf{r}_N) = \alpha^k U^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N). \tag{227}$$

Продифференцируем равенство (227) по α и в полученном выражении положим $\alpha = 1$:

$$\frac{d}{d\alpha} U^{(k)}(\alpha\mathbf{r}_1, \alpha\mathbf{r}_2, \ldots, \alpha\mathbf{r}_N) = \frac{d}{d\alpha} \alpha^k U^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) \Rightarrow$$
$$\sum_i \frac{\partial U^{(k)}(\alpha\mathbf{r}_1, \alpha\mathbf{r}_2, \ldots, \alpha\mathbf{r}_N)}{\partial \alpha\mathbf{r}_i} \frac{d\alpha\mathbf{r}_i}{d\alpha} = k\alpha^{(k-1)} U^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) \Rightarrow$$
$$\sum_i \frac{\partial U^{(k)}(\alpha\mathbf{r}_1, \alpha\mathbf{r}_2, \ldots, \alpha\mathbf{r}_N)}{\partial \alpha\mathbf{r}_i} \mathbf{r}_i = k\alpha^{(k-1)} U^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) \Rightarrow$$
$$\sum_i \frac{\partial U^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_i} \mathbf{r}_i = kU^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N). \tag{228}$$

Последняя строчка ур. (228) является содержанием теоремы Эйлера об однородных функциях.

Если потенциальная функция является однородной функцией координат степени k, то теорема вириала (226) приобретает вид

$$2\bar{T} = k\bar{U}^{(k)}. \tag{229}$$

Например в поле ньтоновского потенциала (140) $k = -1$.

17 Движение при наложенных связях. Классификация связей. Примеры голономных и неголономных связей. Идеальные связи. Уравнения Лагранжа 1-го рода.

Под связями понимают не вытекающие из уравнения движения ограничения налагаемые на положения, скорости и ускорения МТ. Задача о движении механической системы со связями (или задача о движении *несвободной* механической системы) возникает в результате упрощения представлений о реальном взаимодействии тел.

Рассмотрим например движение бусинки на проволоке натянутой в пространстве. При заданных начальных и граничных (для проволоки) условиях методами теоретической механики можно найти как закон движения бусинки так и деформации проволоки. Если проволока достаточно жесткая и ее деформацией мы пренебрегаем, то тем самым мы наложим связь на движение бусинки. Связи реализуются посредством поверхностей различных тел, стержней, нитей и т.п. Аналитически связи выражаются соотношениями между радиус-векторами, скоростями и ускорениями точек. Например в случае движения бусинки по проволоке такими соотношениями будут уравнения $z-f(x)=0$ и $y-\varphi(x)=0$, представляющие из себя уравнение кривой в пространстве, соответствующей расположению проволоки в пространстве.

Связи разделяют на голономные (интегрируемыми) и неголономные. Голономные связи это связи уравнения которых можно свести к виду

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, K, \tag{230}$$

где K число связей (независимых, см. ниже). Например такие связи реализуются в рассмотренной выше задаче о движении бусинки по проволоке. Неголономные связи нельзя свести к соотношениям (230). Отметим, что голономные связи накладывают ограничения и на скорости и на ускорения МТ. Неголономная связь, на пример, реализуется в задаче о шаре, который катится без проскальзывания по поверхности. Условия качения без проскальзывания - это условие равенства нулю скорости точки касания шара и поверхности. Отметим, что в задаче о шаре, который катится без проскальзывания по прямой реализуется голономная связь.

Связи делят также на стационарные (склерономные) и нестационарные (реономные). В первом случае уравнения связей не зависят от времени, во втором зависят. Примером нестационарной голономной связи может служить связь наложенная на МТ движущуюся по горизонтальной плоскости, перемещающейся в вертикальном направлении со скоростью v. Уравнение такой связи можно записать в виде

$$f = z - vt = 0. \tag{231}$$

Различают также удерживающие (уравнения которых задаются равенствами) и неудерживающие (уравнения которых задаются неравенствами) связи. Неудерживающие связи реализуются, на пример, в задаче о движении двух шаров соединенных нерастяжимой нитью.

В дальнейшем мы будем рассматривать голономные удерживающие связи (230). Чтобы учесть данные связи их уравнения нужно добавить к системе уравнений Ньютона (54). Однако мы знаем, что система уравнений Ньютона при заданных начальных условиях имеет единственное решение, которое может случайным образом удовлетворить системе (230), но в общем случае системы (230) и (54) будут несовместны. Поэтому в динамике несвободных систем вводятся новые силы - силы реакции связей $\mathbf{R}_i$. Это силы с которыми тела осуществляющие связи действуют на МТ рассматриваемой системы. Таким образом уравнения движения несвободной системы примут вид

$$\begin{cases} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \ldots, N \\ f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, K. \end{cases} \tag{232}$$

В отличие от $\mathbf{F}_i$ силы реакции связей $\mathbf{R}_i$ не являются заданными силами, они должны быть найдены в результате решения системы уравнений (232).

Теперь мы можем сформулировать основную задачу механики несвободной системы с голономными связями. Это задача об отыскании закона движения системы и реакций связи по заданным начальным условиям, активным силам и уравнениям связей. Здесь мы сталкиваемся с трудностью, что число уравнений в системе (232) равно $3N+K$, что меньше (за исключением случая когда $K = 3N$) числа неизвестных функций 6N. То есть задача не является определенной. Она будет таковой если ввести $3N - K$ дополнительных условий связывающих силы реакции связей. Это реализуется для так называемых *идеальных* связей. Чтобы определить, что такое идеальная связь определим сперва *действительные*, *возможные* и *виртуальные* перемещения.

Действительное перемещение происходит за время dt в соответствии с уравнениями движения и уравнениями связи.

Возможные перемещение $d\mathbf{r}_i$ удовлетворяют уравнениям связи (230):

$$\sum_i \nabla_i f_\alpha d\mathbf{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, K. \tag{233}$$

Виртуальные перемещение $\delta\mathbf{r}_i$ удовлетворяют уравнениям связи (230) в данный момент времени. По определению они удовлетворяют уравнениям

$$\sum_i \nabla_i f_\alpha \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, K. \tag{234}$$

Как видно из уравнений (233) и (234) для стационарных связей понятия возможных и виртуальных перемещений совпадают.

Теперь определим идеальную связь. Это связь сумма работ всех реакций связей которой на виртуальных перемещениях (виртуальная работа реакции связей) равна нулю. Иными словами между реакциями связей существуют такие соотношения, что для любых $\delta\mathbf{r}_i$, удовлетворяющих ур. (234), выполняется равенство

$$\delta A_R \equiv \sum_i^N \mathbf{R}_i \delta\mathbf{r}_i = 0. \tag{235}$$

Рассмотрим для примера виртуальную работу для МТ, движущейся по горизонтальной плоскости перемещающейся в вертикальном направлении со скоростью v. В соответсвии с ур. (231) и (234) для виртуальных перемещений имеем уравнение

$$\delta z = 0. \tag{236}$$

Если связь в данной задаче идеальна, то в соответствии с ур. (235) имеем

$$\delta A_R = R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z = R_x \delta x + R_y \delta y = 0. \tag{237}$$

Так как на δx и δy не наложены никакие условия, то из ур. (237) следует, что $R_x = 0$ и $R_y = 0$, то есть движение происходит без трения. Отметим, что условие равенства нулю работы на возможном перемещении удовлетворяющем уравнению

$$dz - v dt = 0 \tag{238}$$

не привело бы к равенствам $R_x = 0$, $R_y = 0$. Таким образом именно равенство нулю сил реакции связей на *виртуальных* перемещениях привело нас к выводу о том, что поверхность в рассматриваемой задаче является абсолютно гладкой. Можно показать, что любые гладкие поверхности и кривые и их сочетание со связями состоящими из тонких стержней исчезающей массы и заданной длины будет идеальной связью если в местах соединения связей отсутствует трение.

Связи называются независимыми если ни одна из них не является следствием других. Для этого ранг функциональной матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_K} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{K+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_K} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{K+1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{3N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_K} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{K+1}} & \dots & \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{3N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_K}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_K}{\partial x_K} & \frac{\partial f_K}{\partial x_{K+1}} & \dots & \frac{\partial f_K}{\partial x_{3N}} \end{pmatrix} \tag{239}$$

должен быть равен K. В (239) мы использовали сплошную нумерацию декартовых координат МТ

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = y_1, \quad x_3 = z_1, \quad x_4 = x_2, \dots, \quad x_{3N} = z_N. \tag{240}$$

Для определенности будем считать, что определитель составленный из K строк и первых K столбцов матрицы (239) отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_K} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_K} \\ \dots & \dots & \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_K} \\ \dots & \dots & \\ \frac{\partial f_K}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_K}{\partial x_K} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{241}$$

Запишем подробнее ур. (234) для виртуальных перемещений δx_i:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_K}\delta x_K + \frac{\partial f_1}{\partial x_{K+1}}\delta x_{K+1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}}\delta x_{3N} & = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_K}\delta x_K + \frac{\partial f_2}{\partial x_{K+1}}\delta x_{K+1} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_{3N}}\delta x_{3N} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_K}\delta x_K + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{K+1}}\delta x_{K+1} + \dots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{3N}}\delta x_{3N} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{\partial f_K}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_K}{\partial x_K}\delta x_K + \frac{\partial f_K}{\partial x_{K+1}}\delta x_{K+1} + \dots + \frac{\partial f_K}{\partial x_{3N}}\delta x_{3N} & = 0. \end{cases} \tag{242}$$

$3N-K$ виртуальных перемещений $\delta x_{K+1}, \delta x_{K+2}, \dots, \delta x_{3N}$ будут *независимыми*: им можно придать любые значения, а систему равенств (242) удовлетворить за счет определенных значений для *зависимых* K виртуальных перемещений $\delta x_1, \dots, \delta x_K$. Действительно, придадим независимым виртуальным перемещениям произвольные значения $\delta x^0_{K+1}, \delta x^0_{K+2}, \dots, \delta x^0_{3N}$ и перенесем слагаемые содержащие данные виртуальные перемещения в правую сторону уравнений в системе (242). В результате получим систему линейных уравнений на виртуальные перемещения $\delta x_1, \dots, \delta x_K$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_K}\delta x_K & = -\sum_{i=K+1}^{3N} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\delta x^0_i \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_K}\delta x_K & = -\sum_{i=K+1}^{3N} \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\delta x^0_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_K}\delta x_K & = -\sum_{i=K+1}^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x^0_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{\partial f_K}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_K}{\partial x_K}\delta x_K & = -\sum_{i=K+1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}\delta x^0_i, \end{cases} \tag{243}$$

которая всегда имеет единственное решение в силу отличия от нуля определителя (241).

Используя, аналогично (240), сплошную нумерацию для сил реакции связей

$$R_1 = R_{x1}, \quad R_2 = R_{y1}, \quad R_3 = R_{z1}, \quad R_4 = R_{x2}, \quad \dots, \quad R_{3N} = R_{zN}, \tag{244}$$

перепишем условие идеальности связи (235) в виде

$$R_1\delta x_1 + \dots + R_K\delta x_K + R_{K+1}\delta x_{K+1} + \dots + R_{3N}\delta x_{3N} = 0. \tag{245}$$

Умножим каждое из уравнений (242) на некоторое число λ_α, называемое множителем Лагранжа, затем вычтем получившиеся уравнения из ур. (245). В результате получим

$$\left(R_1 - \sum_{\alpha=1}^{K}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\right)\delta x_1 + \dots + \left(R_K - \sum_{\alpha=1}^{K}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_K}\right)\delta x_K +$$
$$\left(R_{K+1} - \sum_{\alpha=1}^{K}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{K+1}}\right)\delta x_{K+1} + \dots + \left(R_{3N} - \sum_{\alpha=1}^{K}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{3N}}\right)\delta x_{3N} = 0 \tag{246}$$

В силу отличия от нуля определителя (241) всегда можно выбрать множители Лагранжа λ_α таким образом, чтобы занулить выражения в скобках для первых K слагаемых (находящихся в первой строчке) в левой части равенства (246). При этом выражения в скобках для последних $3N - K$ слагаемых (находящихся во второй строчке) в левой части равенства (246) окажутся равны нули в силу независимости соответствующих виртуальных перемещений $\delta x_{K+1}, \delta x_{K+2}, \ldots, \delta x_{3N}$. Таким образом, приходим к выводу, что всегда можно подобрать K множителей Лагранжа $\lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, K$ так, чтобы выразить $3N$ сил реакции идеальных связей с помощью уравнений

$$R_i = \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, 3N. \tag{247}$$

Или возвращаясь к обычной нумерации координат получаем

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{248}$$

Объединяя ур. (248) и (232) окончательно получаем

$$\begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha(t) \nabla_i f_\alpha, \quad i = 1, \ldots, N \\ f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, K. \end{cases} \tag{249}$$

Система ур. (249) называется уравнениями Лагранжа с реакциями связей или уравнениями *Лагранжа первого рода.* Как следует из ее вывода она справедлива для систем с идеальными голономными связями. Система (249) содержит $N + k$ уравнений и $N + k$ неизвестных. Неизвестными являются N радиус-векторов и K множителей Лагранжа.

18 Уравнение дАламбера. Обобщенные координаты. Уравнения Лагранжа 2-го рода. Функция Лагранжа. Принцип виртуальных работ.

Уравнение дАламбера. Умножим уравнения в первой строчке системы (232) на виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_i$ и просуммируем по всем МТ. С учетом равенства (235) для идеальных связей в результате получим

$$\sum_{i}^{N} (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i)\, \delta \mathbf{r}_i = 0. \tag{250}$$

Уравнение (250) называется общим уравнением механики или уравнением дАламбера.

Обобщенные координаты. Говорят, что система N МТ на которую наложены K независимых голономных связей (230) имеет $s = 3N - K$ *степеней свободы.* В этом случае можно ввести s *независимых* обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$, которые полностью характеризуют положение системы (радиус-вектора МТ):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), i = 1, \ldots, N \tag{251}$$

и обращают ур. связей (230) в тождество:

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1(q_1, \ldots, q_s, t), \cdots, \mathbf{r}_N(q_1, \ldots, q_s, t), t) \equiv 0, \quad \alpha = 1, \ldots, K. \tag{252}$$

Производные $\dot{q}_i$ и $\ddot{q}_i$ называются обобщенными скоростями и ускорениями соответственно.

Уравнения Лагранжа 2-го рода. Функция Лагранжа. С учетом равенства (251) виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_i$ связаны с *независимыми* виртуальными перемещениями δq_j уравнениями

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)}{\partial q_j}\delta q_j, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{253}$$

Подставляя (253) в общее уравнение механики (250), получаем

$$\sum_j \left(\sum_i^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_i^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \tag{254}$$

С учетом независимости величин δq_j из уравнения (254) следует равенство

$$\sum_i^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_i^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{255}$$

Представим первую сумму в равенстве (255) в виде

$$\sum_i^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i^N m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_i^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) =$$
$$\sum_i^N m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_i^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} =$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \sum_i^N \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \sum_i^N \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \tag{256}$$

При выводе (256) мы использовали равенство

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \tag{257}$$

которое следует из

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \tag{258}$$

Вторая сумма в равенстве (255) по определению есть *обобщенная сила*:

$$Q_j \equiv \sum_i^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s. \tag{259}$$

Объединяя ур. (255,256,259), получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, s. \tag{260}$$

Система s уравнений (260) есть уравнения Лагранжа в независимых координатах или уравнения *Лагранжа второго рода.* Неизвестными функциями являются s обобщенных координат. Эти уравнения не содержат реакций связей как неизвестных функций. Для потенциальных сил

$$\mathbf{F}_i^p = -\nabla_i U, \tag{261}$$

где U дается равенством (218), обобщенная сила дается равенством

$$Q_j^p = \sum_i^N \mathbf{F}_i^p \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i^N -\nabla_i U \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U(q_1, \dots, q_s, t)}{\partial q_j}. \tag{262}$$

Можно показать, что для так называемых *обобщенно-потенциальных* сил, по определению задаваемых равенством

$$\mathbf{F}_i^{gp} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U^{gp}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U^{gp}}{\partial \mathbf{r}_i}, \tag{263}$$

соответствующая обобщенная сила задается равенством

$$Q_j^{gp} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U^{gp}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U^{gp}}{\partial q_j}, \tag{264}$$

где

$$U^{gp} = U^{(1)} + U^{(0)}, \tag{265}$$

U^{gp} есть обобщенный потенциал, $U^{(1)}$ - линейная функция скоростей, а $U^{(0)}$ не зависит от скоростей (зависит только от координат). Согласно определению (227) $U^{(1)}$ и $U^{(0)}$ являются однородными функциями скоростей первой и нулевой степени соответственно. Заметим, что если $U^{(1)} = 0$, то обобщенно-потенциальная сила совпадает с потенциальной. Если рассматриваемые силы можно представить в виде суммы диссипативной (см. ур. (213)) и обобщенно потенциальной:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^d + \mathbf{F}_i^{gp}, \tag{266}$$

то соответствующая обобщенная сила дается равенством

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{gp}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U^{gp}}{\partial q_j} + Q_j^d \tag{267}$$

и уравнения Лагранжа (260) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^d \quad j = 1, \ldots, s, \tag{268}$$

где

$$Q_j^d = \sum_i^N \mathbf{F}_i^d \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \ldots, s \tag{269}$$

есть обобщенная диссипативная сила,

$$L = T - U^{gp} \tag{270}$$

есть функция Лагранжа. Как правило индекс "gp"у обобщенного потенциала опускают:

$$L = T - U. \tag{271}$$

Принцип виртуальных работ. Пусть в начальный момент времени система находится в положении $\mathbf{r}_{0i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ и скорости всех МТ равны нулю. Если система и во все последующие моменты времени будет находится в том же положении, то это положение называется положением равновесия. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\ddot{\mathbf{r}}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$. Из Ур. (250) видно, что для этого необходимо, чтобы

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0. \tag{272}$$

Нетрудно показать и достаточность этого условия. Условие (272) называется принципом *виртуальных работ*. Согласно этому принципу в равновесии виртуальная работа активных сил равна нулю. С учетом ур. (253) и (259) условие (272) можно переписать в виде

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_j^s Q_j \delta q_j = 0. \tag{273}$$

С учетом независимости величин δq_j из уравнения (273) следует $Q_j = 0$ $(j = 1, \ldots, s)$, то есть равенство нулю всех обобщенных сил в положении равновесия.

19 Обобщенный импульс. Циклические координаты. Формулировка законов сохранения с помощью функции Лагранжа.

Обобщенный импульс. Циклические координаты. Величина

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{274}$$

называется обобщенным импульсом. С учетом определения (274) ур. Лагранжа (268) можно переписать как

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} + Q_j^d \quad j = 1, \ldots, s. \tag{275}$$

Координата q_j называется *циклической*, если Лагранжиан от нее явно не зависит. Как видно из ур. (275), если координата q_j является циклической и обобщенная диссипативная сила Q_j равна нулю, то соответствующий обобщенный импульс p_j сохраняется, то есть будет являться первым интегралом движения.

Обобщенная энергия Домножим левую и правую части ур. Лагранжа (268) на $\dot{q}_j$ и просуммируем по j. После ряда преобразований получим

$$\begin{aligned}
\sum_j \left(\dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) &= \sum_j Q_j^d \dot{q}_j \Rightarrow \\
\sum_j \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} &= \sum_j Q_j^d \dot{q}_j \Rightarrow \\
\frac{d}{dt}\left(\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - L\right) &= \sum_j Q_j^d \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \\
\dot{E}^g &= \sum_j Q_j^d \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t},
\end{aligned} \tag{276}$$

где

$$E^g \equiv \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - L \tag{277}$$

есть *обобщенная энергия*. Из ур. (276) следует, что если Лагранжиан системы явно от времени не зависит и диссипативные силы равны нулю, то обобщенная энергия сохраняется.

Найдем связь между обобщенной энергией (277) и энергией (219). Согласно ур. (201) и (258) для кинетической энергии как функции обобщенных координат и скоростей имеем

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2 =$$

$$\sum_i \frac{m_i}{2}\left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)\left(\sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$\sum_{jk}\left(\sum_i \frac{m_i}{2}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_j\left(\sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)\dot{q}_j + \sum_i \frac{m_i}{2}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{jk} t_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_j t_j\dot{q}_j + \sum_i \frac{m_i}{2}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \tag{278}$$

Таким образом, кинетическую энергию как функцию обобщенных координат и скоростей можно представить в виде

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}, \tag{279}$$

где $T^{(2)}$ (первое слагаемое в последней строчке (278)) квадратично зависит от обобщенных скоростей, $T^{(1)}$ (второе слагаемое в последней строчке (278)) линейно зависит от обобщенных скоростей и $T^{(0)}$ (последнее слагаемое в последней строчке (278)) не зависит от обобщенных скоростей. Согласно определению (227) $T^{(2)}$, $T^{(1)}$ и $T^{(0)}$ являются однородными функциями скоростей второй, первой и нулевой степени соответственно. Согласно ур. (270) и (265) функцию Лагранжа также можно представить в виде

$$L = L^{(2)} + L^{(1)} + L^{(0)}, \tag{280}$$

где

$$L^{(2)} = T^{(2)}, \tag{281}$$

$$L^{(1)} = T^{(1)} - U^{(1)}, \tag{282}$$

$$L^{(0)} = T^{(0)} - U^{(0)}. \tag{283}$$

Наконец с учетом ур. (277) и (228) для обобщенной энергии получаем

$$E^g = 2L^{(2)} + L^{(1)} - L^{(2)} - L^{(1)} - L^{(0)} = L^{(2)} - L^{(0)} = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)}. \tag{284}$$

Для энергии, согласно ур. (219) имеем

$$E = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} + U^{(0)}. \tag{285}$$

Заметим, что если радиус-вектора как функции обобщенных координат (ур. (251)) не содержат времени явно, то $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$ и согласно ур. (278)

$$T^{(1)} = T^{(0)} = 0 \left(T = T^{(2)}\right). \tag{286}$$

В этом случае, как следует из ур. (285) и (284) обобщенная энергия совпадает с энергией:

$$E^g = E. \tag{287}$$

Заметим, что если уравнения голономных связей (230) не содержат времени явно, то уравнения (251) все равно допускают явную зависимость от времени радиус-векторов как функций обобщенных координат. Однако мы будем всегда подразумевать, что

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0. \tag{288}$$

Таким образом получаем, что если уравнения голономных связей не содержат времени явно, то обобщенная энергия совпадает с энергией:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \Rightarrow E^g = E. \tag{289}$$

20 Связь законов сохранения импульса, момента количества движения и энергии с однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени.

В силу однородности пространства свойства замкнутой системы не должны меняться при параллельном переносе переносе системы как целого в пространстве. В частности не должна меняться функция Лагранжа. Изменение функции Лагранжа при переносе на бесконечно малый вектор ε при неизменных скоростях есть

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = \varepsilon \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 \tag{290}$$

В силу произвольности ε имеем

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0. \tag{291}$$

С другой стороны, в силу уравнений Лагранжа

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{P} = 0. \tag{292}$$

Изотропность пространства означает, что свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте в пространстве. В частности не должна меняться функция Лагранжа. Рассмотрим изменение функции Лагранжа при повороте определяемом вектором $\delta\phi = \delta\phi\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ единичные вектор направление которого совпадает с осью поворота (направление поворота определяется правилом правого винта по отношению к направлению $\mathbf{n}$), а $\delta\phi$ равняется углу поворота. При этом приращение радиус-векторов и скоростей будет даваться формулами

$$\delta\mathbf{r}_i = \delta\phi[\mathbf{n}, \mathbf{r}_i] \tag{293}$$

и

$$\delta\mathbf{v}_i = \delta\phi[\mathbf{n}, \mathbf{v}_i] \tag{294}$$

соответственно. Тогда изменение функции Лагранжа будет

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}\delta\mathbf{r}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}\delta\mathbf{v}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}\delta\phi[\mathbf{n}, \mathbf{r}_i] + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}\delta\phi[\mathbf{n}, \mathbf{v}_i] =$$

$$\delta\phi \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i[\mathbf{n}, \mathbf{r}_i] + \delta\phi \sum_i \mathbf{p}_i[\mathbf{n}, \mathbf{v}_i] = \delta\phi\mathbf{n}\left(\sum_i [\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{p}}_i] + [\mathbf{v}_i, \mathbf{p}_i]\right) =$$

$$\delta\phi\mathbf{n}\frac{d}{dt}\sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] = \delta\phi\frac{d}{dt}(\mathbf{n}\mathbf{L}). \tag{295}$$

Так как вектор $\mathbf{n}$ произволен, то из $\delta L = 0$ следует, что $\dot{\mathbf{L}} = 0$.

Из ур. (295) также следует (не обязательно для изолированной системы), что

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}(\mathbf{n}\mathbf{L}). \tag{296}$$

С другой стороны, из уравнений Лагранжа (275) следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}p_\phi, \tag{297}$$

где p_ϕ обобщенный импульс соответствующий углу поворота (как обобщенной координате) вокруг направления $\mathbf{n}$. Из (296) и (297) следует, что обобщенный импульс соответствующий координате угла поворота системы есть проекция момента количества движения системы МТ на ось поворота:

$$p_\phi = \mathbf{n}\mathbf{L}. \tag{298}$$

В силу однородности времени функция Лагранжа замкнутой системы не должна зависеть явно от времени. Согласно ур. (276) это приводит к закону сохранения энергии.

21 Силы трения, пропорциональные скорости, их учет в лагранжевой формулировке механики. Диссипативная функция Рэлея.

Рассмотрим диссипативные силы

$$\mathbf{F}_i^d = -k_i\mathbf{v}_i, \quad k_i > 0 \tag{299}$$

линейно зависящие от скорости. Данные силы можно записать в виде производной по скорости

$$\mathbf{F}_i^d = -\frac{\partial D}{\partial \mathbf{v}_i} \tag{300}$$

от диссипативная функция Рэлея

$$D = \frac{1}{2}\sum_i k_i \dot{\mathbf{r}}_i^2. \tag{301}$$

С учетом равенств (257) и (269) для обобщенной диссипативной силы получаем

$$Q_j^d = \sum_i^N \mathbf{F}_i^d \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i^N \mathbf{F}_i^d \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_i^N \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \quad j = 1, \ldots, s \tag{302}$$

Выражение (301) для диссипативной функции с точностью до замены $m_i \to k_i$ совпадает с выражением (201) для кинетической энергии. Поэтому для диссипативной функции как функции обобщенных координат и скоростей аналогично (278) получаем

$$D = \sum_{jk}\left(\sum_i \frac{k_i}{2}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_j\left(\sum_i k_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)\dot{q}_j + \sum_i \frac{k_i}{2}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{jk} d_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_j d_j\dot{q}_j + \sum_i \frac{k_i}{2}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \tag{303}$$

Таким образом, диссипативную функцию как функцию обобщенных координат и скоростей можно представить в виде

$$D = D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)}, \tag{304}$$

где $D^{(2)}$ (первое слагаемое в последней строчке (303)) квадратично зависит от обобщенных скоростей, $D^{(1)}$ (второе слагаемое в последней строчке (303)) линейно зависит от обобщенных скоростей и $D^{(0)}$ (последнее слагаемое в последней строчке (303)) не зависит от обобщенных скоростей. Согласно определению (227) $D^{(2)}$, $D^{(1)}$ и $D^{(0)}$ являются однородными функциями скоростей второй, первой и нулевой степени соответственно.

Если уравнения голономных связей не содержат времени явно, то (ср. 286)

$$D = D^{(2)}. \tag{305}$$

В этом случае ур. (276) запишется в виде

$$\dot{E}^g = -2D - \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{306}$$

22 Понятие малых колебаний. Устойчивое равновесие. Кинетическая и потенциальная энергия системы материальных точек, совершающих малые колебания. Уравнения движения.

Будем рассматривать системы для которых потенциальная энергия не зависит от скорости и времени $U = U^{(0)}(q_1, q_2, \dots, q_s)$ (ср. 265) и связи не зависят от времени $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$. Согласно (273) в равновесии обобщенные силы равны нулю, отсюда, согласно (262), в равновесии производная от потенциальной энергии по обобщенным координатам равна нулю:

$$\left(Q_j^p\right)_0 = -\left(\frac{\partial U(q_1, \dots, q_s)}{\partial q_j}\right)_0 = 0, \quad j = 1, \dots, s. \tag{307}$$

Подстрочный индекс "0"означает положение равновесия.

Устойчивым называется такое положение равновесия, когда система после небольшого возмущения (скорости МТ приобретают ненулевые значения и (или) координаты получают небольшое приращение) система будет совершать движение в некоторой окрестности равновесной конфигурации.

Если потенциальная энергия в равновесии имеет минимум, то положение равновесия будет устойчивым. Это видно из простых соображений. Пусть система в результате возмущения равновесного состояния получает энергию dE. Так как потенциальная энергия имеет минимум, то при удалении от равновесной конфигурации U будет увеличиваться, а T уменьшаться, пока не достигнет наименьшего возможного нулевого значения. Это указывает на ограниченность движения такой системы.

Положим

$$q_j = q_{0j} + \eta_j, \tag{308}$$

где q_{0j} обобщенные координаты в положении равновесия. Величины η_i примем за новые обобщенные координаты и будем считать их малыми. Разложим U в ряд Тейлора

$$U(q_1, q_2, \dots, q_s) = U(q_0) + \sum_j \left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)_0 \eta_j + \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i}\right)_0 \eta_j \eta_i + \cdots \tag{309}$$

Если отсчитывать энергию от равновесного значения $U(q_0)$, то с учетом (307) для малых колебаний получаем

$$U(q_1, q_2, \dots, q_s) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i}\right)_0 \eta_j \eta_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} k_{ij}\eta_i\eta_j, \tag{310}$$

где

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i}\right)_0 \tag{311}$$

есть вещественная, симметричная и положительно определенная матрица потенциальной энергии.

С учетом (278) и (286)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{jk} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \tag{312}$$

где

$$m_{ij} = (t_{ij})_0 \tag{313}$$

есть вещественная, симметричная и положительно определенная матрица кинетической энергии. Согласно (271) для лагранжиана системы получаем

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} \eta_i \eta_j, \tag{314}$$

а уравнения движения (268) примут вид

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j k_{ij} \eta_j = Q_i, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{315}$$

где Q_i составляющая обобщенной силы отличная от $-\frac{\partial U}{\partial q_i}$.

Свободные одномерные колебания Для свободных ($Q_i = 0, i = 1$) одномерных ($s = 1$) колебаний ур. (314, 315) принимают вид

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\eta}^2 - \frac{1}{2} k \eta^2, \tag{316}$$

$$m \ddot{\eta} + k \eta = 0, \tag{317}$$

или

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0, \tag{318}$$

где $m = m_{11}$, $k = k_{11}$, $\eta = \eta_1$ и $w = \sqrt{k/m}$ есть угловая частота. Частота есть основная характеристика колебаний, независящая от начальных условий.

Общее решение (317) имеет вид

$$\eta = a \cos(\omega t + \alpha) \tag{319}$$

или

$$\eta = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \tag{320}$$

где

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \tag{321}$$

есть амплитуда колебания,

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \tag{322}$$

Энергия системы есть

$$E = \frac{m\dot{\eta}^2}{2} + \frac{k\eta^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{\eta}^2 + \omega^2\eta^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2. \tag{323}$$

Зависимость координаты от времени удобно представлять в виде вещественной части комплексного выражения:

$$\eta = Re(Ae^{i\omega t}), \tag{324}$$

где

$$A = ae^{i\alpha} \tag{325}$$

есть комплексная амплитуда.

Вынужденные одномерные колебания Пусть на систему помимо потенциальной силы независящей от времени также действует зависящая от времени периодическая сила

$$Q(t) = Q\cos(\Omega t + \beta). \tag{326}$$

Уравнение движения тогда примет вид

$$m\ddot{\eta} + k\eta = Q\cos(\Omega t + \beta), \tag{327}$$

или

$$\ddot{\eta} + \omega^2\eta = Q/m\cos(\Omega t + \beta). \tag{328}$$

Будем искать частное решение (328) в виде $b\cos(\Omega t + \beta)$. Подставляя его в (328) находим, что $b = \frac{Q}{m(\omega^2-\Omega^2)}$. Как известно, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения можно представить в виде суммы общего решение однородного уравнение и частного решения неоднородного уравнения. Решение однородного уравнения (319) было найдено ранее. Таким образом общее решение (328) запишется в виде

$$\eta = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{Q}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\cos(\Omega t + \beta). \tag{329}$$

Решение (329) неприменимо в случае резонанса $\omega = \Omega$. Выясним вид решения вблизи резонанса, когда $\Omega = \omega + \varepsilon$. Представим общее решение в комплексном виде как

$$\eta = Re\left(Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t}\right) = Re\left(\left(A + Be^{i\varepsilon t}\right)e^{i\omega t}\right). \tag{330}$$

Так как величина $A + Be^{i\varepsilon t}$ мало меняется в течении периода $2\pi/\omega$, то движения вблизи резонанса можно рассматривать как малые колебания с переменной амплитудой

$$C = \left|A + Be^{i\varepsilon t}\right|, \tag{331}$$

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha). \tag{332}$$

Амплитуда колеблется с частотой ε между пределами $|a - b| \le C \le a + b$. Это явление носит название биений.

Затухающие одномерные колебания Пусть на систему помимо потенциальной силы также действует диссипативная сила, линейно зависящая от скорости, которую согласно (302 - 305) можно представить в виде

$$Q^d = -d\dot{q}, \tag{333}$$

где $d = d_{11}$. Уравнение движения тогда примет вид

$$m\ddot{\eta} + d\dot{\eta} + k\eta = 0 \tag{334}$$

или

$$\ddot{\eta} + 2\lambda\dot{\eta} + \omega^2\eta = 0, \tag{335}$$

где $\lambda = \frac{d}{2m}$. Согласно общим правилам будем искать решение (335) в виде

$$\eta = e^{\kappa t}. \tag{336}$$

Подставляя (336) в (335) находим для κ характеристическое уравнение

$$\kappa^2 + 2\lambda\kappa + \omega^2 = 0 \tag{337}$$

решение которого будет

$$\kappa_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}. \tag{338}$$

Следует различать три случая. Первый $\lambda > \omega$. В этом случае общее решение будет

$$\eta = c_1 e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\right)t} + c_2 e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\right)t}. \tag{339}$$

Движение состоит в убывании η. Этот тип движения называют апериодическим затуханием.

Второй случай $\lambda = \omega$. Характеристическое уравнение имеет один корень $\kappa_{1,2} = -\lambda$. Как известно, в этом случае общее решение имеет вид

$$\eta = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t}. \tag{340}$$

Это особый случай апериодического затухания. Движение так же как и в первом случае не имеет колебательного характера.

Наконец третий случай $\lambda < \omega$. В этом случае корни (338) характеристического уравнения комплексны. Интересующее нас вещественное решение будет

$$\eta = Re\left(\tilde{c}_1 e^{-\left(\lambda - i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\right)t} + \tilde{c}_2 e^{-\left(\lambda + i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\right)t}\right) =$$
$$e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\tilde{\omega}t + c_2 \sin\tilde{\omega}t\right) = e^{-\lambda t} a \cos(\tilde{\omega}t + \alpha). \tag{341}$$

В этом случае движение представляет из себя затухающие колебания с частотой $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} < \omega$. Уменьшение частоты происходит из за действия сил трения, которые задерживают движение.

Вынужденные одномерные колебания при наличии сил трения .
Рассмотрим одномерные колебания при одновременном наличии сил (326) и (333). Для простоты положим $\beta = 0$ в (326). В этом случае уравнение движения будет

$$\ddot{\eta} + 2\lambda\dot{\eta} + \omega^2\eta = Q/m\cos(\Omega t). \tag{342}$$

Представим его в комплексной форме

$$\ddot{\eta} + 2\lambda\dot{\eta} + \omega^2\eta = (Q/m)Re\left(e^{i\Omega t}\right) \tag{343}$$

и решение будем искать в виде

$$\eta = Re(Be^{i\Omega t}). \tag{344}$$

Подставляя ур. (344) в (343), получаем уравнение для B

$$-\Omega^2 B + 2i\lambda\Omega B + \omega^2 B = Q/m \tag{345}$$

решение которого будет

$$B = \frac{Q/m}{\omega^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega}. \tag{346}$$

Представляя комплексное B в виде

$$B = be^{i\delta}, \tag{347}$$

где b и δ вещественные числа, найдем, что

$$b = \sqrt{|B|^2} = \frac{Q/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}, \tag{348}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{ImB}{ReB} = -\frac{-2\lambda\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \tag{349}$$

Тогда частное решение (344) запишем в виде

$$\eta = Re(Be^{i\Omega t}) = Re(be^{i(\Omega t+\delta)}) = \frac{Q/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \delta). \tag{350}$$

Резонанс амплитуды наблюдается при

$$\Omega^2 = \omega^2 - 2\lambda^2. \tag{351}$$

Для получения общего решения нужно к частному решению (350) прибавить одно из общих решений (339), (340) или (341) однородного уравнения.

23 Свободные малые колебания системы материальных точек. Комплексные амплитуды. Собственные частоты, их вещественность.

Для свободных ($Q_i = 0, i = 1, \dots, s$) колебаний ур. (315) принимает вид

$$\sum_j m_{ij}\ddot{\eta}_j + \sum_j k_{ij}\eta_j = 0, \quad i = 1, \dots, s, \tag{352}$$

Будем искать решение в виде

$$\eta_i = Re\left(A_i e^{iwt}\right), \tag{353}$$

где A_i - комплексная амплитуда. Так как сами уравнения (23) вещественные, то мы можем "Re"вынести вперед перед уравнениями. При этом поскольку система уравнений также линейна, то можно оперировать с комплексными величинами до самого конца вычислений. Тогда, подставляя 353 в , получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_j \left(k_{ij} - \omega^2 m_{ij}\right) A_j = 0, \quad i = 1, \dots, s. \tag{354}$$

Чтобы существовало нетривиальное решение необходимо

$$\left|k_{ij} - \omega^2 m_{ij}\right| = 0. \tag{355}$$

Это уравнение s-ой степени относительно ω^2. Корни его дают *собственные частоты* $\omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, s$. Покажем, что эти корни вещественны и положительны.

Умножим ур. (354) на A_i^* и просуммируем по i. В результате получаем

$$\omega^2 = \frac{\sum_{ij} A_i^* k_{ij} A_j}{\sum_{ij} A_i^* m_{ij} A_j}. \tag{356}$$

Квадратичные форму в числителе и знаменателе вещественны и положительны. Действительно, представим $A_i = u_i + iv_i$, где u_i и v_i вещественные числа, тогда

$$\sum_{ij} A_i^* k_{ij} A_j = \sum_{ij} (u_i - iv_i) k_{ij} (u_j + iv_j)$$
$$\sum_{ij} u_i k_{ij} u_j - i\sum_{ij} v_i k_{ij} u_j + i\sum_{ij} u_i k_{ij} v_j + \sum_{ij} v_i k_{ij} v_j$$
$$\sum_{ij} u_i k_{ij} u_j + \sum_{ij} v_i k_{ij} v_j > 0. \tag{357}$$

И аналогично получаем, что $\sum_{ij} A_i^* m_{ij} A_j > 0$. Заметим, что если бы мы не потребовали, чтобы матрица k_{ij} была положительно определенная, то ω^2 по прежнему было бы вещественным, но могла бы принимать и отрицательные значения или частота w могла бы быть мнимой. С учетом (353) это означало бы неустойчивость положения равновесия.

24 Свободные малые колебания системы материальных точек. Общий вид решения. Матрица комплексных амплитуд и ее свойства.

Так как система уравнений (23) линейна, то его общее решение запишется в виде линейной суперпозиции решений (353) со всеми возможным значениями собственных частот ω_α:

$$\eta_i = Re\left(\sum_\alpha C_\alpha A_{i\alpha} e^{iw_\alpha t}\right), \tag{358}$$

где C_α - произвольные постоянные, $A_{i\alpha}, i = 1, \ldots, s$ образуют вектор $\mathbf{A}_\alpha$ удовлетворяющий ур. (354) с $\omega = \omega_\alpha$:

$$\sum_j k_{ij} A_{j\alpha} = \omega_\alpha^2 \sum_j m_{ij} A_{j\alpha}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{359}$$

или

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{i1} & k_{i2} & \ldots & k_{is} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{s1} & k_{s2} & \ldots & k_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \\ \ldots \\ A_{i\alpha} \\ \ldots \\ A_{s\alpha} \end{pmatrix} = \omega_\alpha^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{i1} & m_{i2} & \ldots & m_{is} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{s1} & m_{s2} & \ldots & m_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \\ \ldots \\ A_{i\alpha} \\ \ldots \\ A_{s\alpha} \end{pmatrix} \tag{360}$$

Вектора $\mathbf{A}_\alpha$ образуют матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\alpha} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\alpha} & \ldots & A_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{i\alpha} & \ldots & A_{is} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{s\alpha} & \ldots & A_{ss} \end{pmatrix} \tag{361}$$

Рассмотрим свойства матрицы $\mathbf{A}$. Умножим (359) на $A^*_{i\beta}$ и просуммируем по i

$$\sum_{ij} A^*_{i\beta} k_{ij} A_{j\alpha} = \omega_\alpha^2 \sum_{ij} A^*_{i\beta} m_{ij} A_{j\alpha}. \tag{362}$$

Также запишем (359) для ω_β^2, возьмем комплексное сопряжение, умножим на $A_{i\alpha}$ и просуммируем по i

$$\sum_{ij} A_{i\alpha} k_{ij} A^*_{j\beta} = \omega_\beta^2 \sum_{ij} A_{i\alpha} m_{ij} A^*_{j\beta}. \tag{363}$$

Теперь вычтем (363) из (362). В результате получим

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \sum_{ij} A_{i\alpha} m_{ij} A^*_{j\beta} = 0. \tag{364}$$

Если считать, что все частоты различны, то из (365) следует

$$\sum_{ij} A_{i\alpha} m_{ij} A^*_{j\beta} = 0, \alpha \neq \beta. \tag{365}$$

Если же $\omega_\alpha^2 = \omega_\beta^2$, то из (364) вообще говоря не следует равенство (365). Однако в этом случае не только вектора $\mathbf{A}_\alpha$ и $\mathbf{A}_\beta$, но и любые их линейные комбинации будут удовлетворять ур. (360). Линейные комбинации всегда можно взять таким образом, чтобы новые вектора удовлетворяли условию (365). Та же ситуация и в случае трех и более совпадающих частот. Из соответствующих векторов всегда можно образовать линейные комбинации удовлетворяющие условию (365). Если $\alpha = \beta$, то сумма в (365) отлична от нуля (см. 357). Удобно нормировать вектора $\mathbf{A}_\alpha$ таким образом, чтобы она равнялась единице. Таким образом, можно считать, что всегда выполняется равенство

$$\sum_{ij} A_{i\alpha} m_{ij} A^*_{j\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{366}$$

Взяв вещественную часть в правой части равенства (358) запишем общее решение в виде

$$\eta_i = \sum_\alpha c_\alpha a_{i\alpha} \cos\left(w_\alpha t + \varphi_\alpha\right) \tag{367}$$

где c_α - произвольные вещественные постоянные, $a_{i\alpha}, i = 1, \ldots, s$ образуют вещественный вектор $\mathbf{a}_\alpha$, который также как и $\mathbf{A}_\alpha$ удовлетворяет ур. (359) и (366):

$$\sum_j k_{ij} a_{j\alpha} = \omega_\alpha^2 \sum_j m_{ij} a_{j\alpha}, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{368}$$

$$\sum_{ij} a_{i\alpha} m_{ij} a_{j\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{369}$$

Умножим (368) на $a_{i\beta}$ и просуммируем по i. С учетом (369) получаем

$$\sum_{ij} a_{i\alpha} k_{ij} a_{j\beta} = \delta_{\alpha\beta} \omega_\alpha^2. \tag{370}$$

Если аналогично (361) ввести матрицу

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\alpha} & \ldots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\alpha} & \ldots & a_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i\alpha} & \ldots & a_{is} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s\alpha} & \ldots & a_{ss}, \end{pmatrix} \tag{371}$$

то ур. (369) и (370) перепишутся в матричном виде как

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s1} & m_{s2} & \dots & m_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (372)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \dots & k_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_s^2 \end{pmatrix} \quad (373)$$

25 Свободные малые колебания системы материальных точек. Нормальные координаты.

Нормальные координаты ξ_α определяются уравнением

$$\eta_i = \sum_\alpha a_{i\alpha}\xi_\alpha \quad (374)$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_i \\ \dots \\ \eta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\alpha} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\alpha} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i\alpha} & \dots & a_{is} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s\alpha} & \dots & a_{ss}, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_\alpha \\ \dots \\ \xi_s \end{pmatrix} \quad (375)$$

Запишем кинетическую и потенциальную энергии через нормальные координаты. Для кинетической энергии согласно (312) и (372) имеем

$$T = \frac{1}{2}\sum_{jk} m_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{\eta}_1 & \dot{\eta}_2 & \dots & \dot{\eta}_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1s}\\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{s1} & m_{s2} & \dots & m_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\eta}_1\\ \dot{\eta}_2\\ \vdots\\ \dot{\eta}_s\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2 & \dots & \dot{\xi}_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1s}\\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{s1} & m_{s2} & \dots & m_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\\ \vdots\\ \dot{\xi}_s\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2 & \dots & \dot{\xi}_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\\ \vdots\\ \dot{\xi}_s\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\dot{\xi}_\alpha^2 \tag{376}$$

Для потенциальной энергии согласно (310) и (373) имеем

$$U = \frac{1}{2}\sum_{jk} k_{ij}\eta_i\eta_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1s}\\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{s1} & k_{s2} & \dots & k_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_s\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1s}\\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{s1} & k_{s2} & \dots & k_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_s\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \omega_s^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_s\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\omega_\alpha^2\xi_\alpha^2. \tag{377}$$

Лагранжиан системы будет

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(\dot{\xi}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2\xi_\alpha^2\right), \tag{378}$$

а уравнения Лагранжа примут вид

$$\ddot{\xi}_\alpha^2 + \omega_\alpha^2\xi_\alpha^2 = 0, \alpha = 1, \dots, s, \tag{379}$$

Общие решения которых согласно (318) и (319) будут

$$\xi_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha). \tag{380}$$

26 Свободные малые колебания системы материальных точек. Случай кратных корней характеристического уравнения.

Как уже указано выше, в этом случае существует произвол в выборе собственных векторов $\mathbf{A}_\alpha$. Рассмотрим сначала случай двукратного корня ($\omega_1^2 = \omega_2^2$) на примере системы с двумя степенями свободы $s = 2$. Характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{vmatrix} = (k_{12} - \omega^2 m_{12})^2 - (k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) = 0 \tag{381}$$

Рассмотрим частный случай

$$\frac{k_{12}}{m_{12}} = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{k_{22}}{m_{22}} = \omega_0^2, \tag{382}$$

тогда (381) сведется к

$$(m_{12}^2 - m_{11} m_{22})(\omega_0^2 - \omega^2) = 0, \tag{383}$$

то есть ω_0^2 будет двукратным корнем. Уравнение (360) будет

$$\begin{pmatrix} k_{11} - \omega_0^2 k_{11} & k_{12} - \omega_0^2 k_{11} \\ k_{21} - \omega_0^2 k_{11} & k_{22} - \omega_0^2 k_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{384}$$

Матрица в ур. (384) - нулевая, следовательно собственные вектора $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ произвольны. Решения (384) образуют двумерное пространство. Это утверждение остается справедливым и в случае двукратного корня для системы с большим чем $s = 2$ степеней свободы. Вектора $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ не обязаны быть ортогональны (в обобщенном смысле (369)), однако мы всегда можем их выбрать ортогональными причем бесконечным числом способов. Действительно, пара собственных векторов имеет четыре произвольные координаты с помощь которых нужно удовлетворить трем условиям (369).

Аналогичные рассуждения можно провести и в случае m-кратного корня. Соответствующие решения (для данной $m-$кратно вырожденной частоты) образуют $m-$мерное пространство. Их всегда можно выбрать (бесконечным числом способов) удовлетворяющими условию (369)).

27 Вынужденные колебания. Явление резонанса.

Пусть на систему помимо потенциальной силы независящей от времени также действует зависящая от времени периодическая сила. Удобнее решать задачу в нормальных координатах. Получающиеся уравнения движения

$$\ddot{\xi}_\alpha + \omega_\alpha^2 \xi_\alpha = Q_\alpha^{(\xi)} \cos(\Omega t + \beta) \tag{385}$$

уже были рассмотрены ранее (см. 328). Надстрочный индекс (ξ) у $Q_\alpha^{(\xi)}$ показывает каким обобщенным координатам соответствует обобщенная сила.

Свяжем $Q_\alpha^{(\xi)}$ и $Q_i^{(\eta)}$. Согласно (259) имеем

$$Q_\alpha^{(\xi)} = \sum_i^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \xi_\alpha} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \sum_j^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_\alpha} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_\alpha} \sum_i^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \eta_j} = \sum_{j=1}^s Q_j^{(\eta)} \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_\alpha}. \tag{386}$$

Согласно (374) получаем

$$Q_\alpha^{(\xi)} = \sum_{j=1}^s a_{j\alpha} Q_j^{(\eta)}. \tag{387}$$

28 Малые колебания при наличии сил трения. Комплексная частота, Коэффициент затухания.

Пусть на систему помимо потенциальной силы также действует диссипативная сила, линейно зависящая от скорости, которую согласно (302 - 305) можно представить в виде

$$Q_i^d = -\sum_j d_{ij} \dot{\eta}_j \tag{388}$$

Уравнения движения (315) тогда примут вид

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j d_{ij} \dot{\eta}_j + \sum_j k_{ij} \eta_j = 0, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{389}$$

Будем искать решение в виде (ср. 353)

$$\eta_i = Re\left(A_i e^{\gamma t}\right), \tag{390}$$

где A_i - комплексная амплитуда. Аналогично 354, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_j \left(\gamma^2 m_{ij} + \gamma d_{ij} + k_{ij}\right) A_j = 0, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{391}$$

Чтобы существовало нетривиальное решение необходимо чтобы

$$Det(\gamma) \equiv \left|\gamma^2 m_{ij} + \gamma d_{ij} + k_{ij}\right| = 0. \tag{392}$$

Это уравнение 2s-ой степени относительно γ. Представим γ как

$$\gamma = i\omega - \lambda, \tag{393}$$

где ω и λ вещественные числа. Покажем, что

$$\lambda > 0. \tag{394}$$

Умножим (391) на A_i^* и просуммируем по i, получим уравнение

$$a\gamma^2 + b\gamma + c = 0, \tag{395}$$

где

$$a = \sum_{ij} A_i^* m_{ij} A_j > 0, \tag{396}$$

$$b = \sum_{ij} A_i^* d_{ij} A_j > 0, \tag{397}$$

$$c = \sum_{ij} A_i^* k_{ij} A_j > 0. \tag{398}$$

Если γ вещественно ($\omega = 0$), то так как в этом случае $a\gamma^2 > 0, b > 0, c > 0$, то из (395) следует, что $\gamma < 0$ или $\lambda > 0$. В общем случае, если γ комплексно, то так как a, b, c вещественны, то γ^* также будет решением (395). Тогда, по теореме Виета $\gamma + \gamma^* = -2\lambda = -b/a < 0$, то есть $\lambda > 0$.

И так, решением (392) будут 2s величин

$$\gamma_j = i\omega_j - \lambda_j, \quad j = 1, \ldots, 2s, \tag{399}$$

где

$$\lambda_j > 0, \quad j = 1, \ldots, 2s. \tag{400}$$

Пусть $A_{ij}, i = 1, \ldots, s$ удовлетворяют ур. (391) с $\gamma = \gamma_j$, тогда общее решение (391) (ср. (358)) будет

$$\eta_i = Re\left(\sum_{j=1}^{2s} C_j A_{ij} e^{\gamma_j t}\right), \quad i = 1, \ldots, s \tag{401}$$

где C_j - произвольные постоянные. Условие (400) понятно из физических соображений. В противном случае координаты и скорости, а с ними и энергия системы экспоненциально возрастали бы со временем, между тем как наличие диссипативных сил должно приводить к уменьшению энергии согласно (306).

29 Вынужденные колебания при наличии затухания.

Пусть на МТ системы помимо потенциальной силы также действует диссипативные силы (388), линейно зависящая от скорости и периодические силы $ReQ_i e^{i\Omega t}$. Уравнения движения (315) тогда примут вид

$$\sum_j m_{ij}\ddot{\eta}_j + \sum_j d_{ij}\dot{\eta}_j + \sum_j k_{ij}\eta_j = ReQ_i e^{i\Omega t}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{402}$$

Будем искать частное решение в виде

$$\eta_i = Re\left(B_i e^{i\Omega t}\right), \tag{403}$$

Подставляя (403) в (402) получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_j \left(-\Omega^2 m_{ij} + i\Omega d_{ij} + k_{ij}\right) B_j = Q_i, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{404}$$

Согласно теореме Крамера

$$B_j = \frac{Det_j(i\Omega)}{Det(i\Omega)}, \tag{405}$$

где $Det(i\Omega)$ определяется ур. (392), $Det_j(i\Omega)$ есть определитель, который получается при замене $j-$ого столбца в матрице на величины $Q_1, ..., Q_s$.

В случае небольших диссипативных сил для нахождения условия резонанса достаточно рассмотреть числитель в (405):

$$Det(i\Omega) = \left|-\Omega^2 m_{ij} + i\Omega d_{ij} + k_{ij}\right| = G\prod_{j=1}^{2s}(i\Omega - \gamma_j) = iG\prod_{j=1}^{2s}(\Omega + i\gamma_j) =$$
$$iG\prod_{j=1}^{s}(\Omega + i\gamma_j)(\Omega + i\gamma_j^*) = iG\prod_{j=1}^{s}(\Omega - \omega_j - i\lambda_j)(\Omega + \omega_j - i\lambda_j) =$$
$$iG\prod_{j=1}^{s}(\Omega^2 - \omega_j^2 - \lambda_j^2 - 2i\Omega\lambda_j) \tag{406}$$

Величины γ_j, определяемые ур. (399), известны из ур. (392). При выводе (406), для простоты, мы считали, что все величины γ_j комплексны. Для квадрата модуля $Det(i\Omega)$ имеем

$$|Det(i\Omega)|^2 = |G|^2\prod_{j=1}^{s}\left((\Omega^2 - \omega_j^2 - \lambda_j^2)^2 + 4\Omega^2\lambda_j^2\right) \tag{407}$$

Каждый из сомножителей в (407) имеет минимум при значениях

$$\Omega_j^{res\,2} = \omega_j^2 - \lambda_j^2. \tag{408}$$

При малых диссипативных силах резонансные значения частоты внешней силы будут приближенно даваться значениями (408).

30 Понятие абсолютно твердого тела. Обобщенные координаты для твердого тела: направляющие косинусы, углы Эйлера. Выражение матрицы поворота через углы Эйлера.

Абсолютно твердое тело это такая система МТ, расстояния между которыми постоянны:

$$r_{ij} = c_{ij} \tag{409}$$

Таким образом, на координаты точек твердого тела наложены голономные стационарные связи. Число степеней свободы твердого тела можно определить из следующих соображений. Выберем какие-либо 3 точки твердого тела, не лежащие на одной прямой. Тогда для любой другой $i-$ой МТ, не лежащей в одной плоскости с исходными тремя точками, как можно убедиться использую ур. (239), уравнения связей

$$r_{1i} = c_{1i}, \quad r_{2i} = c_{2i}, \quad r_{3i} = c_{3i} \tag{410}$$

являются независимыми и полностью фиксируют положение $i-$ой точки. Остается определить число степеней свободы выбранной системы из трех точек. Исходное число координат равно девяти. Число связей

$$r_{12} = c_{12}, \quad r_{13} = c_{13}, \quad r_{23} = c_{23} \tag{411}$$

равно трем. Таким образом, остается шесть независимых координат. Если все МТ лежат на одной прямой, то число степеней свободы будет равно пяти.

Так как расстояние между точками твердого тела неизменно, то можно ввести подвижную систему координат $O'x'y'z'$ жестко связанную с твердым телом. Координаты твердого тела в данной системе фиксированы. Будем обозначать орты лабораторной (неподвижной) системы как $\mathbf{e}_i$, а подвижной как ε_i и будем вместо буквенных использовать численные индексы (см. 11 - 15). Радиус-вектор начала подвижной системы отсчета будем обозначать как $\mathbf{R}$. Тогда согласно ур. (20) радиус-вектора МТ твердого тела в лабораторной ($\mathbf{r}_i$) и подвижной ($\mathbf{r}'_i$) системах отсчета будут связаны соотношением (рис. 9)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \tag{412}$$

Разложение по ортам будет

$$\mathbf{r}_i = \sum_j x_{ij} \mathbf{e}_j \tag{413}$$

$$\mathbf{R} = \sum_j X_j \mathbf{e}_j \tag{414}$$

$$\mathbf{r}'_i = \sum_j x'_{ij} \varepsilon_j \tag{415}$$

Согласно (17) соответствующие координаты будут связаны уравнением

$$x_{ki} = X_i + \sum_j C_{ij} x'_{kj}, \tag{416}$$

где

$$C_{ij} = (\mathbf{e}_i, \varepsilon_j) \tag{417}$$

матрица направляющих косинусов. Координаты x'_j– постоянны (согласно определению подвижной системы отсчета). Таким образом, согласно ур. (416), координаты МТ твердого тела определяются координатами X_i вектора $\mathbf{R}$ и матричными элементами C_{ij}. Матричные элементы C_{ij} не могут однако быть выбраны в качестве независимых координат, так как они подчиняются уравнениям (18, 19).

В качестве трех независимых переменных которые будут определять матричные элементы C_{ij} можно взять три угла Эйлера φ, θ, ψ, последовательные повороты на которые позволяют осуществить переход от одной декартовой системы координат к другой ориентированной произвольным образом относительно исходной. Первый поворот системы $Oxyz$ осуществляется на угол φ вокруг оси z против часовой стрелки. В результате получаем промежуточную систему $\xi\eta\zeta$. Полученную промежуточную систему повернем против часовой стрелки на угол θ вокруг оси ξ. Полученную новую промежуточную систему$\xi'\eta'\zeta'$ повернем против часовой стрелки на угол ψ вокруг оси ζ' и получим таким образом финальную подвижную систему $O'x'y'z'$. Линия пересечения плоскостей xy и $x'y'$ называется линией узлов, она совпадает с осью ξ. Углы Эйлера также можно определить следующим образом. Угол φ это угол между осью узлов и осью x. Угол θ это угол между осями z и z'. Угол ψ это угол между осью узлов и осью x'

Углы Эйлера φ, θ, ψ независимы и полностью определяют ориентацию системы $O'x'y'z'$ относительно $Oxyz$. Вместе с координатами X_i вектора $\mathbf{R}$ будем их использовать в качестве шести независимых координат определяющих положение в пространстве МТ твердого тела.

Осталось получить выражения для C_{ij} как функций углов Эйлера. Согласно 417 матрицы определяющие отдельные повороты на φ, θ, ψ будут

$$C_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{418}$$

$$C_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{419}$$

$$C_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{420}$$

Матрицу $\mathbf{C}$ теперь можно получить перемножая матрицы C_φ, C_θ, C_ψ

$$C = C_\varphi C_\theta C_\psi =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{421}$$

31 Кинематическая теорема Эйлера о произвольном перемещении твердого тела с одной неподвижной точкой. Теорема Шаля.

Рассмотрим движение твердого тела с одной неподвижной точкой. В этом случае удобно совместить начало подвижной системы отсчета с неподвижной точкой. В этом случае вектор $\mathbf{R}$ в ур. (412) будет нулевым и положение МТ твердого тела будет определяться тремя углами Эйлера. Для движения твердого тела с неподвижной точкой справедлива теорема Эйлера, которая утверждает, что произвольное перемещение твердого тела с неподвижной точкой можно осуществить с помощью вращения вокруг некоторой оси. Теорема Эйлера означает, что для матрицы $\mathbf{C}$ наудется вектор удовлетворяющий

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{422}$$

Иными словами, у матрицы $\mathbf{C}$ должно быть собственное число равное единице. Пусть решением соответствующего характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} C_{11}-\lambda & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22}-\lambda & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{423}$$

будут $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Так как матрица $\mathbf{C}$ ортогональна, то

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = det|C| = 1, \tag{424}$$

$$|\lambda_i| = 1 \tag{425}$$

Если все λ_i вещественны, то для их значений возможно только $1, 1, 1$ или $1, -1, -1$. В обоих случаях присутствует собственное число равное единице.

Так как коэффициенты в ур. (423) вещественны, то если среди λ_i есть комплексные числа, то решением будет и комплексно сопряженное решение. Пусть например, λ_2 комплексно и $\lambda_3 = \lambda_2^*$. Тогда из (424) и (424) следует, что $\lambda_1 = 1$. Таким образом теорема доказана.

При выводе мы использовали, что определитель матрицы $\mathbf{C}$ равен единице. Это следует из явного вида матрицы (421). Также это понятно и из физических соображений, так как ортогональная матрица с определителем равным минус единице включает операцию инверсии.

Теорема Шаля утверждает, что общее движение твердого тела разлагается на поступательное при котором выбранное начало подвижной системы координат переходит из первоначального положения в конечное и вращение вокруг некоторой оси проходящей через конечное положение начала подвижной системы координат. Теорема Шаля следует из теоремы Эйлера и ур. (416). Это разложение можно осуществить не единственным образом.

32 Угловая скорость, ее свойства. Мгновенная ось вращения. Скорость и ускорение точек твердого тела

Введем вектор

$$\rho_i = \sum_j x'_{ij}\mathbf{e}_j \tag{426}$$

Постоянный вектор ρ (426) имеет коэффициенты разложения по векторам лабораторной системы $\mathbf{e}_i$ такие же как и вектор $\mathbf{r}'_i$ (415) по векторам подвижной (жестко связанной с твердым телом) системы ε_i.

Введем оператор

$$\hat{C}\mathbf{e}_j \equiv \varepsilon_j. \tag{427}$$

Тогда

$$\hat{C}\rho_k = \mathbf{r}'_k \tag{428}$$

и

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \hat{C}\rho_i. \tag{429}$$

Матрица оператора $\hat{C}$ в базисе $\mathbf{e}_j$ есть матрица C_{ij} (417). Тогда в матричном виде ур. (429) имеет вид (416). Продифференцируем (429) по времени

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\hat{C}}\rho_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\hat{C}}\hat{C}^T\mathbf{r}'_i. \tag{430}$$

Рассмотрим

$$\frac{d\hat{C}\hat{C}^T}{dt} = \dot{\hat{C}}\hat{C}^T + \hat{C}\dot{\hat{C}}^T = \dot{\hat{C}}\hat{C}^T + \left(\dot{\hat{C}}\hat{C}^T\right)^T = 0. \tag{431}$$

Ур. (431) показывает, что матрица $\dot{\mathbf{C}}\mathbf{C}^T$ оператора $\dot{\hat{C}}\hat{C}^T$ антисимметрична. Представим ее в виде

$$\dot{\mathbf{C}}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{432}$$

Так как

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z y + \omega_y z \\ \omega_z x - \omega_x z \\ -\omega_y x + \omega_x y \end{pmatrix} = [\vec{\omega}, \mathbf{r}], \tag{433}$$

где

$$\vec{\omega} = \omega_x\mathbf{e}_x + \omega_y\mathbf{e}_y + \omega_z\mathbf{e}_z = \sum_i \omega_i\mathbf{e}_i, \tag{434}$$

то

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = [\vec{w}, \mathbf{r}'_i], \tag{435}$$

и (430) перепишется в виде

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + [\vec{w}, \mathbf{r}'_i], \tag{436}$$

где $\mathbf{V}$ есть скорость полюса (начала) подвижной системы координат, вектор $\vec{w}$ есть вектор *угловой скорости*. Направление $\vec{w}$ совпадает с направлением мгновенной оси вращения. Ось проходящая через начало подвижной системы отсчета параллельно $\vec{w}$ называется (мгновенной) осью вращения. В процессе движения, в общем случае, меняется как абсолютное значение так и направление угловой скорости. Заметим, что вектора $\mathbf{V}$ и $\vec{w}$ одинаковы для всех точек твердого тела.

Ур. (436) означает, что скорость произвольной точки твердого тела складывается из скорости движения *выбранного* полюса (первое слагаемое в правой части (436)) и скорости вращения относительно этого полюса (второе слагаемое в правой части (436)).

Вектор угловой скорости $\vec{w}$ (как и любой другой) может быть разложен как по ортам лабораторной так и подвижной системы координат:

$$\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \mathbf{e}_i = \sum_i \omega'_i \varepsilon_i. \tag{437}$$

Координаты вектора $\vec{w}$ в лабораторной и подвижной системах отсчета согласно (17) будут связаны уравнением

$$\omega_i = \sum_j C_{ij} \omega'_j. \tag{438}$$

Однако при инверсии координаты $\vec{\omega}$ не меняются, поэтому более правильно угловую скорость называть псевдовектором.

С учетом равенства (427), аналогично выводу (435) получаем, что скорость изменения векторов ε_i есть

$$\dot{\varepsilon}_i = [\vec{w}, \varepsilon_i]. \tag{439}$$

Выберем в качестве начал подвижных систем отсчета две различные точки O_1 и O_2. Тогда, согласно (436) для скорости $i-$ой точки твердого тела имеем

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}^{(1)} + [\vec{w}^{(1)}, \mathbf{r}^{(\mathbf{1})\prime}_i], \tag{440}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}^{(2)} + [\vec{w}^{(2)}, \mathbf{r}^{(\mathbf{2})\prime}_i], \tag{441}$$

где верхний индекс в круглых скобках указывает к какой системе относятся соответствующие величины.

С другой стороны, согласно рис. 10 имеем

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}^{(1)} + [\vec{w}^{(1)}, \mathbf{r}^{(\mathbf{1})\prime}_i] = \mathbf{V}^{(1)} + [\vec{w}^{(1)}, \mathbf{r}^{(\mathbf{2})\prime}_i + O_1\vec{O}_2] = \\ \mathbf{V}^{(1)} + [\vec{w}^{(1)}, O_1\vec{O}_2] + [\vec{w}^{(1)}, \mathbf{r}^{(\mathbf{2})\prime}_i]. \tag{442}$$

Так как вектор $\mathbf{r^{(2)}}'_i$ произволен, то из (441) и (442) следует, что

$$\mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{V}^{(1)} + [\vec{w}^{(1)}, O_1\vec{O}_2], \tag{443}$$

$$\vec{w}^{(1)} = \vec{w}^{(2)} = \vec{w}, \tag{444}$$

то есть скорости движения полюсов различных систем отсчета в общем случае различаются, а угловая скорость не зависит от выбора подвижной системы отсчета.

Вектор

$$d\vec{\phi} \equiv \vec{w}dt \tag{445}$$

называется бесконечно малым углом поворота. Согласно (436) (после умножения на dt) для бесконечного малого перемещения твердого тела имеем

$$d\mathbf{r}_i = d\mathbf{R} + [d\vec{\phi}, \mathbf{r}'_i], \tag{446}$$

С учетом (435) для ускорения точек твердого тела получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{V}} + \frac{d[\vec{w}, \mathbf{r}'_i]}{dt} = \\ \dot{\mathbf{V}} + [\dot{\vec{w}}, \mathbf{r}'_i] + [\vec{w}, [\vec{w}, \mathbf{r}'_i]]. \end{aligned} \tag{447}$$

Первое слагаемое в (447) представляет из себя ускорения полюса подвижной системы отсчета, второе называется вращательным ускорением, а третье осестремительным ускорением.

33 Движение в неинерциальной системе отсчета. Ускорение во вращающейся системе. Силы инерции: центробежная сила, сила Кориолиса.

Найдем уравнение движение МТ относительно неинерциальной (подвижной) системы отсчета. Для этого рассмотрим более общую задачу, когда МТ может перемещаться относительно подвижной системы отсчета. Связь между радиус-векторами МТ в инерциальной и неинерциальной системе отсчета по прежнему будет даваться ур. (412), но координаты x'_{ij} радиус-вектора в подвижной системе отсчета (см. ур. (415)) уже не будут постоянными величинами. Определим производную $\frac{d'}{dt}$ по отношению к подвижной системе отсчета (*относительная производная*):

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{r}'_i \equiv \sum_j \dot{x}'_{ij}\varepsilon_j. \tag{448}$$

То есть для взятия относительной производной необходимо разложить произвольный вектор по ортам подвижной системы отсчета и при дифференцировании считать их постоянными Аналогично определяются вторые и т.д. производные относительно подвижной системы отсчета:

$$\frac{d^{2\prime}}{dt^2}\mathbf{r}'_i \equiv \sum_j \ddot{x}'_{ij}\varepsilon_j. \tag{449}$$

Свяжем производную по времени с относительной производной по времени. С учетом (439) получаем

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}'_i = \sum_j \dot{x}'_{ij}\varepsilon_j + \sum_j x'_{ij}\dot{\varepsilon}_j = \frac{d'}{dt}\mathbf{r}'_i + \sum_j x'_{ij}[\vec{w},\varepsilon_j] = \frac{d'}{dt}\mathbf{r}'_i + [\vec{w},\sum_j x'_{ij}\varepsilon_j] =$$
$$\frac{d'}{dt}\mathbf{r}'_i + [\vec{w},\mathbf{r}'_i] = \mathbf{v}'_i + [\vec{w},\mathbf{r}'_i], \tag{450}$$

где мы обозначили $\frac{d'}{dt}\mathbf{r}'_i \equiv \mathbf{v}'_i$. С учетом (450) скорость точки связана с относительной скоростью

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \mathbf{V} + [\vec{w},\mathbf{r}'_i] + \mathbf{v}'_i. \tag{451}$$

Первые два слагаемых в правой части ур. (451) (совпадают с (436)) называются переносной скоростью (такую скорость имела бы МТ если бы она не двигалась относительно подвижной системы отсчета).

Найдем связь между ускорением и относительным ускорением МТ. Дифференцируя по времени (451), получаем

$$\mathbf{a}_i = \frac{d}{dt}\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\mathbf{V} + \frac{d}{dt}[\vec{w},\mathbf{r}'_i] + \frac{d}{dt}\mathbf{v}'_i =$$
$$\dot{\mathbf{V}} + [\dot{\vec{w}},\mathbf{r}'_i] + [\vec{w},\mathbf{v}'_i] + [\vec{w},[\vec{w},\mathbf{r}'_i]] + [\vec{w},\mathbf{v}'_i] + \frac{d'}{dt}\mathbf{v}'_i =$$
$$\dot{\mathbf{V}} + [\dot{\vec{w}},\mathbf{r}'_i] + [\vec{w},[\vec{w},\mathbf{r}'_i]] + 2[\vec{w},\mathbf{v}'_i] + \mathbf{a}'_i, \tag{452}$$

где

$$\mathbf{a}'_i \equiv \frac{d'}{dt}\mathbf{v}'_i = \sum_j \ddot{x}'_{ij}\varepsilon_j \tag{453}$$

есть относительное ускорение.

Сумма первых трех слагаемых в (452) (совпадет с 447) есть переносное ускорение. Такое ускорение имела бы МТ если бы она покоилась относительно подвижной системы отсчета. Четвертое слагаемое есть ускорение Кориолиса.

С учетом (54) уравнения движения в неинерциальной системе отсчета принимают вид

$$m_i\mathbf{a}'_i = \mathbf{F}_i - m_i\dot{\mathbf{V}} - m_i[\dot{\vec{w}},\mathbf{r}'_i] - m_i[\vec{w},[\vec{w},\mathbf{r}'_i]] - 2m_i[\vec{w},\mathbf{v}'_i] \tag{454}$$

Сумма второго третьего и четвертого слагаемых называется переносной силой, четвертое слагаемое называется центробежной силой, а последнее силой Кориолиса.

34 Кинематические уравнения Эйлера

С учетом (418 - 421) имеем

$$\dot{\mathbf{C}}\mathbf{C}^T = \dot{\mathbf{C}}_\varphi \mathbf{C}_\theta \mathbf{C}_\psi \mathbf{C}_\psi^T \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{C}_\varphi^T + \mathbf{C}_\varphi \dot{\mathbf{C}}_\theta \mathbf{C}_\psi \mathbf{C}_\psi^T \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{C}_\varphi^T + \mathbf{C}_\varphi \mathbf{C}_\theta \dot{\mathbf{C}}_\psi \mathbf{C}_\psi^T \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{C}_\varphi^T =$$
$$\dot{\mathbf{C}}_\varphi \mathbf{C}_\varphi^T + \mathbf{C}_\varphi \dot{\mathbf{C}}_\theta \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{C}_\varphi^T + \mathbf{C}_\varphi \mathbf{C}_\theta \dot{\mathbf{C}}_\psi \mathbf{C}_\psi^T \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{C}_\varphi^T =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta & \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta & 0 & -\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi & \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}. \quad (455)$$

С учетом (432) имеем

$$\omega_1 = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \quad (456)$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \quad (457)$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \quad (458)$$

Далее, с помощью (438) можно получить

$$\omega_1' = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \quad (459)$$

$$\omega_2' = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \quad (460)$$

$$\omega_3' = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \quad (461)$$

Уравнения (456 - 461) называются кинематическими уравнениями Эйлера.

35 Импульс и кинетическая энергия твердого тела. Тензор инерции. Момент инерции относительно данной оси. Эллипсоид инерции. Теорема Штейнера.

Согласно (181) и (436) для импульса твердого тела имеем

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{V} + m_i[\vec{w}, \mathbf{r}_i'] = M\mathbf{V} + M[\vec{w}, \mathbf{r}_c], \quad (462)$$

где

$$M = \sum_i m_i \quad (463)$$

есть масса твердого тела,

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i'}{M} \quad (464)$$

есть радиус-вектор центра масс твердого тела относительно подвижной системы отсчета. Если поместить начало подвижной системы отсчета в центр масс ($\mathbf{r}_c = 0$), то (462) сводится к

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \tag{465}$$

в соответствии с (182). Далее, согласно (190) получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = M\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e, \tag{466}$$

где $\mathbf{R}^e$ сумма реакций внешних связей.

Если рассматривается твердое тело с неподвижной точкой и начало подвижной системы отсчета помещено в данную точку ($\mathbf{V} = 0$), то остается только второе (последнее) слагаемое в правой части ур. (462).

Согласно (201) и (436) для кинетической энергии твердого тела имеем

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\mathbf{V}+[\vec{w},\mathbf{r}'_i])^2) = \frac{1}{2}MV^2+M(\mathbf{V},[\vec{w},\mathbf{r}_c])+\frac{1}{2}\sum_i m_i[\vec{w},\mathbf{r}'_i]^2 \tag{467}$$

Если поместить начало подвижной системы отсчета в центр масс ($\mathbf{r}_c = 0$), то (467) сводится к

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i[\vec{w},\mathbf{r}'_i]^2. \tag{468}$$

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс и кинетической энергии вращения относительно центра масс. Если рассматривается твердое тело с неподвижной точкой и начало подвижной системы отсчета помещено в данную точку ($\mathbf{V} = 0$), то остается последнее слагаемое в правой части ур. (467) или (468). Рассмотрим данное слагаемое подробнее:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_i m_i[\vec{w},\mathbf{r}'_i]^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(w^2{r'_i}^2 - (\vec{w},\mathbf{r}'_i)^2) = \\ \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{kl}({r'_i}^2\delta_{kl} - x'_{ik}x'_{il})w'_k w'_l = \\ \frac{1}{2}\sum_{kl}\left(\sum_i m_i({r'_i}^2\delta_{kl} - x'_{ik}x'_{il})\right) w'_k w'_l = \frac{1}{2}\sum_{kl} I'_{kl}w'_k w'_l,\end{aligned} \tag{469}$$

где

$$I'_{kl} \equiv \sum_i m_i\left({r'_i}^2\delta_{kl} - x'_{ik}x'_{il}\right) \tag{470}$$

есть *тензор инерции*. Для наглядности выпишем его элементы в виде матрицы

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} \sum_i m_i({x'_{i2}}^2 + {x'_{i3}}^2) & -\sum_i m_i x'_{i1}x'_{i2} & -\sum_i m_i x'_{i1}x'_{i3} \\ -\sum_i m_i x'_{i2}x'_{i1} & \sum_i m_i({x'_{i1}}^2 + {x'_{i3}}^2) & -\sum_i m_i x'_{i2}x'_{i3} \\ -\sum_i m_i x'_{i3}x'_{i1} & -\sum_i m_i x'_{i3}x'_{i2} & \sum_i m_i({x'_{i1}}^2 + {x'_{i2}}^2) \end{pmatrix}. \tag{471}$$

В (469 - 471) мы использовали компоненты векторов $\vec{w}$ и $\mathbf{r}'_i$ в подвижной системе координат. По определению, тензор (второго порядка) есть величина, которая преобразуется как

$$x'_{ik}x'_{il}.$$

Таким образом, компоненты тензора инерции вычисленные в осях лабораторной системы координат можно найти с помощью преобразования

$$I_{ij} = \sum_{kl} C_{ik}C_{jl}I'_{kl}, \tag{472}$$

при этом

$$\frac{1}{2}\sum_{kl} I'_{kl}w'_k w'_l = \frac{1}{2}\sum_{kl} I_{ij}w_i w_j. \tag{473}$$

Работать с величинами I'_{kl}, однако, более удобно чем с I_{ij}, так как первые в отличие от вторых являются постоянными. Аналогично (476) можно осуществить преобразование к другой подвижной системе отсчета. При этом, так как тензор I'_{kl} является симметричным, подвижную систему отсчета всегда можно ориентировать таким образом, чтобы тензор инерции был диагональным

$$I'_{kl} = I_k\delta_{kl}. \tag{474}$$

(штрих у величин I_k не ставим). Оси такой системы координат называются главными осями инерции, а величины I_k главными моментами инерции. При этом

$$\frac{1}{2}\sum_{i} m_i[\vec{w}, \mathbf{r}'_i]^2 = \frac{1}{2}\sum_{k} I_k {w'_k}^2. \tag{475}$$

Если $I_1 = I_2 = I_3$, то твердое тело называется *шаровым волчком*, если $I_1 = I_2 \neq I_3 \neq 0$, то твердое тело называется *симметрическим волчком*, если $I_1 = I_2, I_3 = 0$, то твердое тело называется *ротатором*. В этом случае все точки твердого тела лежат на одной прямой.

Момент инерции относительно некоторой оси определяется как

$$I = \sum_{i} m_i d_i^2, \tag{476}$$

где d_k расстояние до оси. Согласно рис. 11, аналогично (469) получаем

$$\begin{aligned} I = \sum_i m_i d_i^2 = \sum_i m_i[\mathbf{n}, \mathbf{r}'_i]^2 = \sum_i m_i(\mathbf{n}^2 {r'_i}^2 - (\mathbf{n}, \mathbf{r}'_i)^2) = \\ \sum_i m_i \sum_{kl}({r'_i}^2\delta_{kl} - x'_{ik}x'_{il})n_k n_l = \\ \sum_{kl}\left(\sum_i m_i({r'_i}^2\delta_{kl} - x'_{ik}x'_{il})\right)n_k n_l = \sum_{kl} I'_{kl}n_k n_l, \end{aligned} \tag{477}$$

где $\mathbf{n}$ единичный вектор вдоль оси относительно которой вычисляется момент инерции, n_k его координаты в системе отсчета в которой вычислялся тензор инерции. В Формуле (477) подразумевается, что тензор инерции вычислен в системе координат начало которой расположено на оси относительно которой вычисляется момент инерции.

Представим угловую скорость в виде

$$\vec{w} = w\mathbf{n}, \tag{478}$$

тогда, согласно ур. (469 ,477)

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i[\vec{w}, \mathbf{r}'_i]^2 = \frac{1}{2}Iw^2, \tag{479}$$

где момент инерции I вычислен относительно мгновенной оси вращения.

Эллипсоид инерции Рассмотрим вектор

$$\tilde{\mathbf{r}} \equiv \frac{1}{\sqrt{I}}\mathbf{n}. \tag{480}$$

Согласно (477) для компонент $\tilde{x}_l$ вектора $\tilde{\mathbf{r}}$ имеем

$$\sum_{kl} I'_{kl}\tilde{x}_k\tilde{x}_l = 1. \tag{481}$$

В главных осях уравнение приобретает вид

$$\sum_k I_k\tilde{x}_k^2 = 1. \tag{482}$$

Уравнения (481),(531) есть уравнения эллипсоида, который называется эллипсоидом инерции. Квадрат длины вектора проведенного из начала координат в точку эллипсоида есть величина обратная моменту инерции твердого тела относительно оси проходящей через начало координат и точку эллипсоида.

Если известен момент инерции относительно оси проходящей через центр масс, то момент инерции относительно другой оси параллельной данной можно вычислить с помощью теоремы Штейнера, которая утверждает, что момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси проходящей через центр масс параллельно данной плюс моменту инерции центра масс относительно исходной оси. Докажем теорему. Пусть d''_i и d'_i расстояния от $i-$ой точки твердого тела до произвольной оси и оси параллельной исходной проходящей через цент масс твердого тела соответственно. Тогда, согласно рис. 12 имеем

$$\begin{aligned} I'' = \sum_i m_i {d''_i}^2 = \sum_i m_i[\mathbf{n}, \mathbf{r}''_i]^2 = \sum_i m_i[\mathbf{n}, \mathbf{r}'_i + \vec{O''O'}]^2 = \\ \sum_i m_i[\mathbf{n}, \vec{O''O'}]^2 + \sum_i m_i[\mathbf{n}, \mathbf{r}'_i]^2 + 2\sum_i m_i\left([\mathbf{n}, \vec{O''O'}], [\mathbf{n}, \mathbf{r}'_i]\right) = \\ MD^2 + \sum_i m_i {d'_i}^2 + 2M\left([\mathbf{n}, \vec{O''O'}], [\mathbf{n}, \mathbf{r}_c]\right) = \\ MD^2 + I', \end{aligned} \tag{483}$$

где I' есть момент инерции относительно оси проходящей через центр масс, а D - расстояние от исходной оси до центра масс твердого тела. Таким образом, теорема доказана.

36 Момент количества движения твердого тела.

Согласно (194),(412),(436),

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i\right] = \sum_i m_i \left[\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \mathbf{V} + [\vec{w}, \mathbf{r}'_i]\right] =$$

$$\sum_i m_i \left[\mathbf{R}, \mathbf{V}\right] + \sum_i m_i \left[\mathbf{R}, [\vec{w}, \mathbf{r}'_i]\right] + \sum_i m_i \left[\mathbf{r}'_i, \mathbf{V}\right] + \sum_i m_i \left[\mathbf{r}'_i, [\vec{w}, \mathbf{r}'_i]\right] =$$

$$M\left[\mathbf{R}, \mathbf{V}\right] + M\left[\mathbf{R}, [\vec{w}, \mathbf{r}'_c]\right] + M\left[\mathbf{r}'_c, \mathbf{V}\right] + \sum_i m_i \left[\mathbf{r}'_i, [\vec{w}, \mathbf{r}'_i]\right] \quad (484)$$

Если поместить начало подвижной системы отсчета в центр масс ($\mathbf{r}_c = 0$), то (484) сводится к

$$\mathbf{L} = M\left[\mathbf{R}, \mathbf{V}\right] + \sum_i m_i \left[\mathbf{r}'_i, [\vec{w}, \mathbf{r}'_i]\right] \quad (485)$$

Таким образом, момент количества движения твердого тела складывается из момента количества движения центра масс (момент количества движения твердого тела как целого) и "собственного момента"связанного с вращением относительно центра масс.

Если рассматривается твердое тело с неподвижной точкой и начало подвижной системы отсчета помещено в данную точку ($\mathbf{V} = 0$, $\mathbf{R} = 0$), то остается только последнее слагаемое в правой части ур. (484) и (485).

Рассмотрим собственный момент

$$\mathbf{L}' = \sum_i m_i \left[\mathbf{r}'_i, [\vec{w}, \mathbf{r}'_i]\right] = \sum_i m_i \left({r'}_i^2 \vec{w} - (\vec{w}, \mathbf{r}'_i)\mathbf{r}'_i\right) \quad (486)$$

подробнее. Для координат собственного момента количества движения имеем

$$L'_k = \sum_i m_i \left({r'}_i^2 w'_k - x'_{ik} \sum_l x'_{il} w'_l\right) = \sum_i m_i \sum_l \left({r'}_i^2 \delta_{kl} - x'_{ik} x'_{il}\right) w'_l$$

$$\sum_l \left(\sum_i m_i ({r'}_i^2 \delta_{kl} - x'_{ik} x'_{il})\right) w'_l = \sum_l I'_{kl} w'_l = I_k w'_k. \quad (487)$$

37 Динамические уравнения Эйлера. Решение уравнений Эйлера для свободного симметричного волчка. Регулярная прецессия.

Для вывода динамических уравнений Эйлера воспользуемся уравнениями движения (200) для момента количества движения системы МТ. Будем считать, что начало подвижной системы отсчета совмещено с центром масс твердого тела. Рассмотрим полную производную по времени от момента количества движения твердого тела. Согласно ур. (450,485,486)

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} M \left[\mathbf{R}, \mathbf{V}\right] + \frac{d}{dt}\mathbf{L}' = M\left[\mathbf{R}, \dot{\mathbf{V}}\right] + \frac{d'}{dt}\mathbf{L}' + [\vec{w}, \mathbf{L}'] \tag{488}$$

Рассмотрим второе и третье слагаемое в ур. (488) подробнее. Согласно ур. (449,487)

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{L}' = \frac{d'}{dt}\sum_k L'_k \varepsilon_k = \sum_k \dot{L}'_k \varepsilon_k = \sum_k I_k \dot{w}'_k \varepsilon_k. \tag{489}$$

Согласно (437,487)

$$[\vec{w}, \mathbf{L}'] = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \\ I_1 w'_1 & I_2 w'_2 & I_3 w'_3 \end{vmatrix} =$$
$$w'_2 w'_3 (I_3 - I_2)\varepsilon_1 + w'_1 w'_3 (I_1 - I_3)\varepsilon_2 + w'_1 w'_2 (I_2 - I_1)\varepsilon_3. \tag{490}$$

Далее, согласно (412) для суммы моментов внешних сил (198) имеем

$$\mathbf{N}^e = \sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}^e_i] = \sum_i [\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}, \mathbf{F}^e_i] = [\mathbf{R}, \mathbf{F}^e] + \sum_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{F}^e_i] =$$
$$[\mathbf{R}, \mathbf{F}^e] + \mathbf{N}^{e\prime}, \tag{491}$$

где мы обозначили

$$\mathbf{N}^{e\prime} \equiv \sum_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{F}^e_i] \tag{492}$$

есть сумма моментов внешних сил относительно центра масс твердого тела. Разложение по ортам подвижной системы координат будет

$$\mathbf{N}^{e\prime} = \sum_k N^{e\prime}_k \varepsilon_k. \tag{493}$$

Согласно ур. (200, 488, 491) имеем

$$M\left[\mathbf{R}, \dot{\mathbf{V}}\right] + \frac{d}{dt}\mathbf{L}' = [\mathbf{R}, \mathbf{F}^e] + \mathbf{N}^{e\prime}. \tag{494}$$

Тогда, согласно (466) уравнение движения для собственного момента количества движения будет

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}' = \mathbf{N}^{e\prime}. \tag{495}$$

С учетом (488, 489, 490, 493) ур. (495) перепишется как

$$\begin{cases} I_1\dot{w}_1' + w_2'w_3'(I_3 - I_2) & = N_1^{e\prime} \\ I_2\dot{w}_2' + w_1'w_3'(I_1 - I_3) & = N_2^{e\prime} \\ I_3\dot{w}_3' + w_1'w_2'(I_2 - I_1) & = N_3^{e\prime} \end{cases} \tag{496}$$

Система уравнений (496) называется динамическими уравнениями Эйлера. Нетрудно убедиться, что система будет справедлива и для случая твердого тела с одной неподвижной точкой. В этом случае величины фигурирующие в (496) следует вычислять относительно системы отсчета начало которой совпадает с неподвижной точкой твердого тела. В общем случае также следует учитывать сумму моментов сил реакции связей.

Решение уравнений Эйлера для свободного симметричного волчка. Регулярная прецессия. Решим систему ур. (496) для свободного симметрического волчка. Поместим начало лабораторной и подвижной системы отсчета в центр масс волчка. Для симметрического волчка $I_1 = I_2 \equiv I \neq I_3 \neq 0$ и ур. (496) сведется к

$$\begin{cases} I\dot{w}_1' + w_2'w_3'(I_3 - I) & = 0 \\ I\dot{w}_2' + w_1'w_3'(I - I_3) & = 0 \\ I_3\dot{w}_3' & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{w}_1' & = -w_2'\Omega \\ \dot{w}_2' & = w_1'\Omega \\ w_3' & = const \end{cases}, \tag{497}$$

где

$$\Omega = w_3'\frac{I_3 - I}{I} = const. \tag{498}$$

Умножив второе из уравнений (497) на i и сложив с первым, получим

$$\frac{d}{dt}(w_1' + iw_2') = i\Omega(w_1' + iw_2') \tag{499}$$

Откуда

$$w_1' + iw_2' = Ae^{i\Omega t} \tag{500}$$

Записав комплексную константу как $A = ae^{i\phi_0}$, окончательно получим

$$\begin{cases} w_1' & = a\cos(\Omega t + \phi_0) \\ w_2' & = a\sin(\Omega t + \phi_0) \\ w_3' & = const \end{cases}, \tag{501}$$

Ур. (501) показывает, что проекция угловой скорости на плоскость $x_1'x_2'$ перпендикулярную оси волчка (x_3') вращается в этой плоскости с постоянной угловой скоростью Ω, оставаясь при этом постоянной по величине. Проекция w_3' угловой скорости на ось волчка также постоянна. Таким образом, заключаем, что угловая скорость $\vec{w}$ равномерно вращается вокруг оси волчка, оставаясь неизменным по величине, рис. 13 Такое движение вектора называется регулярной прецессией. Так как $L_1' = Iw_1'$, $L_2' = Iw_2'$, $L_3' = I_3w_3'$, то такое же движение совершает и вектор момента количества движение **L**. При этом ось волчка x_3', вектор угловой скорости $\vec{w}$ и момент количества движения **L** лежат в одной плоскости. Это также видно из соотношения

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ w_1' & w_2' & w_3' \\ Iw_1' & Iw_2' & I_3w_3' \end{vmatrix} = 0. \tag{502}$$

Рассмотренная картина это движение векторов $\vec{w}$ и **L** по отношению к подвижной связанной с твердым телом системе координат. В лабораторной системе отсчета вектор **L** постоянен, а вектор угловой скорости и ось волчка равномерно прецессируют вокруг него. Найдем частоту прецессии. Направим ось x_3 параллельно **L**. Так как $I_1 = I_2$, то в любой другой подвижной системе координат получающейся из данной некоторым поворотом вокруг оси x_3' тензор инерции также будет диагональным. Воспользуемся данным произволом, чтобы выбрать такую подвижную систему отсчета, для которой (в данный момент) $\psi = 0$ (ось x_1' лежит в плоскости x_1x_2 и следовательно перпендикулярна **L**). С учетом этого условия ур. (459- 461) примут вид

$$\omega_1' = \dot{\theta}, \tag{503}$$

$$\omega_2' = \dot{\varphi}\sin\theta, \tag{504}$$

$$\omega_3' = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta, \tag{505}$$

а выражения для проекции момента количества движения на оси подвижной системы отсчета, в соответствии с (487) будут

$$L_1' = I\dot{\theta}, \tag{506}$$

$$L_2' = I\dot{\varphi}\sin\theta, \tag{507}$$

$$L_3' = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta). \tag{508}$$

С другой стороны, так как ось x_1' перпендикулярна **L**, из рис. 14 видно, что

$$L_1' = 0, \tag{509}$$

$$L_2' = L\sin\theta, \tag{510}$$

$$L_3' = L\cos\theta. \tag{511}$$

Сравнивая (509) и (506) получаем, что $\theta = const$ (уже известное утверждение из рассмотрения в подвижной системе отсчета). Сравнивая (510) и (507) получаем, что частота прецессии оси волчка вокруг момента количества движения есть

$$\dot{\varphi} = L/I, \tag{512}$$

Наконец, сравнивая (511) и (508) получаем выражение для угловой скорости вращения волчка вокруг собственной оси

$$\omega_3' = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = L\cos\theta/I_3. \tag{513}$$

38 Стационарность и устойчивость вращения волчка с произвольными моментами инерции.

Движение твердого тела называется стационарным если $\vec{w} = const$. Согласно ур. (450)

$$\frac{d}{dt}\vec{w} = \frac{d'}{dt}\vec{w} + [\vec{w}, \vec{w}] = \frac{d'}{dt}\vec{w}. \tag{514}$$

Из чего видно, что если движение стационарно по отношению к лабораторной системе координат, то оно будет стационарным и в подвижной системе координат и наоборот. Для свободного несимметричного волчка ур. (496) будет

$$\begin{cases} I_1\dot{w}_1' + w_2'w_3'(I_3 - I_2) & = 0 \\ I_2\dot{w}_2' + w_1'w_3'(I_1 - I_3) & = 0 \\ I_3\dot{w}_3' + w_1'w_2'(I_2 - I_1) & = 0 \end{cases}, \tag{515}$$

откуда видно, что стационарное движение возможно только при вращении вокруг одной из главных осей инерции. То есть стационарное движение возможно при условии

$$w_1' \neq 0, w_2' = 0, w_3' = 0 \tag{516}$$

или

$$w_2' \neq 0, w_1' = 0, w_3' = 0 \tag{517}$$

или

$$w_3' \neq 0, w_1' = 0, w_2' = 0. \tag{518}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного вращения. Пусть для определенности

$$I1 > I2 > I3. \tag{519}$$

Стационарное движение будет устойчивым, если небольшое изменение начальных условий при которых реализуется стационарное движение не возрастает неограниченно со временем.

Рассмотрим небольшое изменение условий (516) при котором

$$w_1' \neq 0, w_2' \ll 0, w_3' \ll 0. \tag{520}$$

Преобразуем при условии (520) систему (515)

$$\begin{cases} I_1\dot{w}_1' + w_2'w_3'(I_3 - I_2) & = 0 \\ I_2\dot{w}_2' + w_1'w_3'(I_1 - I_3) & = 0 \\ I_3\dot{w}_3' + w_1'w_2'(I_2 - I_1) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1' & = const \\ I_2\ddot{w}_2' + \dot{w}_3'w_1'(I_1 - I_3) & = 0 \\ I_3\ddot{w}_3' + \dot{w}_2'w_1'(I_2 - I_1) & = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} w_1' & = const \\ \ddot{w}_2' + w_2'\frac{{w_1'}^2(I_1-I_3)(I_1-I_2)}{I_2I_3} & = 0 \\ \ddot{w}_3' + w_3'\frac{{w_1'}^2(I_1-I_3)(I_1-I_2)}{I_2I_3} & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1' & = const \\ \ddot{w}_2' + \Omega_1^2 w_2' & = 0 \\ \ddot{w}_3' + \Omega_1^2 w_3' & = 0 \end{cases}, \tag{521}$$

где

$$\Omega_1^2 = \frac{{w_1'}^2(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} > 0. \tag{522}$$

При возмущении условий (517) имеем

$$w_2' \neq 0, w_1' \ll 0, w_3' \ll 0. \tag{523}$$

Теперь преобразуем систему (515) при условии (523)

$$\begin{cases} I_1\dot{w}_1' + w_2'w_3'(I_3 - I_2) & = 0 \\ I_2\dot{w}_2' + w_1'w_3'(I_1 - I_3) & = 0 \\ I_3\dot{w}_3' + w_1'w_2'(I_2 - I_1) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1\ddot{w}_1' + \dot{w}_3'w_2'(I_3 - I_2) & = 0 \\ w_2' & = const \\ I_3\ddot{w}_3' + \dot{w}_1'w_2'(I_2 - I_1) & = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{w}_1' + w_1'\frac{{w_2'}^2(I_2-I_3)(I_2-I_1)}{I_1I_3} & = 0 \\ w_2' & = const \\ \ddot{w}_3' + w_3'\frac{{w_2'}^2(I_2-I_3)(I_2-I_1)}{I_1I_3} & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{w}_1' - \Omega_2^2 w_1' & = 0 \\ w_2' & = const \\ \ddot{w}_3' - \Omega_2^2 w_3' & = 0 \end{cases}, \tag{524}$$

где

$$\Omega_2^2 = -\frac{{w_2'}^2(I_2 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3} > 0. \tag{525}$$

Наконец при возмущении условий (518) имеем

$$w_3' \neq 0, w_2' \ll 0, w_1' \ll 0. \tag{526}$$

Преобразуем при условии (526) систему (515)

$$\begin{cases} I_1\dot{w}_1' + w_2'w_3'(I_3 - I_2) & = 0 \\ I_2\dot{w}_2' + w_1'w_3'(I_1 - I_3) & = 0 \\ I_3\dot{w}_3' + w_1'w_2'(I_2 - I_1) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1\ddot{w}_1' + \dot{w}_2'w_3'(I_3 - I_2) & = 0 \\ I_2\ddot{w}_2' + \dot{w}_1'w_3'(I_1 - I_3) & = 0 \\ w_3' & = const \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{w}_1' + w_1'\frac{{w_3'}^2(I_3-I_1)(I_3-I_2)}{I_1I_2} & = 0 \\ \ddot{w}_2' + w_2'\frac{{w_3'}^2(I_3-I_1)(I_3-I_2)}{I_1I_2} & = 0 \\ w_3' & = const \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{w}_1' + \Omega_3^2 w_1' & = 0 \\ \ddot{w}_2' + \Omega_3^2 w_2' & = 0 \\ w_3' & = const \end{cases}, \tag{527}$$

где

$$\Omega_3^2 = \frac{{w_3'}^2(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} > 0. \tag{528}$$

Решением ур. (521) и (527) будет $w_1' = const$, $w_{2,3}' \sim a\cos\Omega_1 t$ и $w_3' = const$, $w_{1,2}' \sim a\cos\Omega_3 t$ соответственно. Небольшие возмущения меняясь периодически, остаются малыми. Стационарное движение устойчиво. В случае (524) $w_{1,3}' \sim ae^{\Omega_2 t}$. Первоначальные небольшие возмущения возрастают, движение неустойчиво.

39 Геометрическая интерпретация Пуансо для свободного движения волчка с произвольными моментами инерции.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения задачи о движении свободного несимметричного волчка. Поместим начала подвижной и лабораторной систем отсчета в центр масс твердого тела. Для решения задачи используем интегралы момента количества движения

$$L_k = \sum_l I_{kl} w_l = const \tag{529}$$

и энергии

$$E = \frac{1}{2} \sum_{kl} I_{ij} w_i w_j = const. \tag{530}$$

Геометрической интерпретацией движения будет визуализация движения эллипсоида инерции определяемого уравнением (см. (481))

$$\sum_{kl} I_{kl} \tilde{x}_k \tilde{x}_l = 1. \tag{531}$$

В уравнениях (529-531) мы используем величины вычисленные в осях лабораторной системы отсчета. Рассмотрим точку эллипсоида

$$x_k = w_k / \sqrt{2E} \tag{532}$$

в направлении вектора угловой скорости $\vec{w}$. Компоненты вектора нормали к касательной плоскости в точке $x_k = w_k/\sqrt{2E}$ есть

$$\left(\mathrm{grad} \sum_{kl} I_{kl} \tilde{x}_k \tilde{x}_l \right)_k = 2 \sum_l I_{kl} \tilde{x}_l = 2 \sum_l I_{kl} w_l / \sqrt{2E} = 2L_k / \sqrt{2E}. \tag{533}$$

В течении времени эллипсоид инерции и вектор угловой скорости меняют свою ориентацию. Ур. (533) показывает, что движение эллипсоида инерции и угловой скорости согласовано таким образом, что вектор нормали к касательной плоскости в точке эллипсоида в направлении угловой скорости сонаправлен с вектором момента количества движения. Так как вектор $\mathbf{L}$ постоянен, то ориентация касательной плоскости в данной точке неизменна.

Расстояние от центра масс до касательной плоскости будет

$$d = (\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{L}/L) = (\vec{w}/\sqrt{2E}, \mathbf{L}/L) = \frac{2E}{L\sqrt{2E}} = \frac{\sqrt{2E}}{L} = const. \tag{534}$$

Ур. (534) показывает, что расстояние от центра эллипсоида до касательной плоскости постоянно. Так как и ориентация плоскости неизменна, то плоскость является неподвижной. Поэтому рассматриваемое движение можно реализовать посредством качения эллипсоида инерции по неподвижной плоскости. Точка касания эллипсоида инерции и плоскости находится в направлении вектора угловой скорости, поэтому ее скорость равна нулю. То есть качение происходит без проскальзывания. В процессе движения точка касания описывает на эллипсоиде инерции кривую, которая называется *полодией.* Аналогичная кривая на плоскости называется *герполодией.*

40 Конфигурационное пространство. Действие. Виртуальные траектории. Основы вариационного исчисления. Понятия функционала, вариации функции, вариации функционала, экстремали. Уравнения Эйлера для отыскания экстремалей. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода из принципа наименьшего действия Гамильтона.

В предыдущих главах для вывода уравнений Лагранжа мы использовали *дифференциальный* принцип дАламбера (250), в котором рассматривается состояние системы в данный момент времени и виртуальные изменения этого состояния. В настоящей главе мы рассмотрим вывод уравнений Лагранжа из *интегрального* вариационного принципа, в котором рассматривается движение системы за конечный промежуток времени и небольшие виртуальные изменения движения в этом промежутке.

В каждый момент времени положение системы определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$ или точкой в *конфигурационном пространстве.* Конфигурационное пространство это воображаемое пространство на координатных осях которого откладываются обобщенные координаты. С течением времени положение меняется, и точка описывает в конфигурационном пространстве кривую, называемую траекторией. Для вывода уравнений Лагранжа из вариационного принципа нам понадобятся некоторые приемы вариационного исчисления. Рассмотрим сначала соответствующую одномерную задачу, когда имеется одна обобщенная координата q.

Пусть имеется набор гладких кривых (воображаемых траекторий) $\tilde{q}(t)$ проходящих через две заданные точки

$$\tilde{q}(t_1) = q^{(1)}, \tag{535}$$

$$\tilde{q}(t_2) = q^{(2)}. \tag{536}$$

Составим интеграл

$$J[\tilde{q}] = \int_{t_1}^{t_2} F\left(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\right) dt, \tag{537}$$

где $F\left(\tilde{q},\dot{\tilde{q}},t\right)$ - заданная функция непрерывная вместе со вторыми производными. Для различных функций $\tilde{q}(t)$ интеграл принимает различные значения. При этом говорят, что $J[\tilde{q}]$ есть *функционал* от функции $\tilde{q}(t)$.

Говорят, что функционал J достигает экстремума на кривой $q(t)$, удовлетворяющей условиям (535,536), если существует такое $\epsilon > 0$, что для всех кривых удовлетворяющих условиям (535,536) и таких, что $|\tilde{q}(t) - q(t)| < \epsilon$ выполняется условие $J[\tilde{q}] - J[q] \geq 0$ (в случае минимума) или $J[\tilde{q}] - J[q] \leq 0$ (в случае максимума).

Основной задачей вариационного исчисления является отыскание кривой $q(t)$ для которой функционал экстремален. При наложении условий (535,536) промежуток времени и значение функций на концах промежутка не меняются. В этом случае говорят о задаче с закрепленными концами.

Для ее решения представим виртуальное перемещение или вариацию функции

$$\tilde{q}(t) - q(t) = \delta q(t) = \alpha\eta(x), \tag{538}$$

где $\eta(x)$ гладкая функция, которая согласно (535,536) удовлетворяет условиям

$$\eta(t_1) = 0, \tag{539}$$

$$\eta(t_2) = 0, \tag{540}$$

а α произвольная переменная. При этом функционал $J[\tilde{q}]$ переходит в функцию $J(\alpha)$ и условие экстремума для него на функции $q(t)$ будет эквивалентно условию экстремума функции $J(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$. Отметим, что при этом мы не делали дополнительных предположений, поскольку на функцию $\eta(x)$ не накладывается никаких условий кроме гладкости и (539,540), следующих из (535,536).

Первой вариацией функционала (которую в дальнейшем будем называть просто вариацией) называют величину

$$\delta J = \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \cdot \alpha. \tag{541}$$

Как ясно из сказанного выше, для экстремума должно быть $\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$, и следовательно

$$\delta J = 0. \tag{542}$$

Вычислим производную

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2} F\left(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\right) dt\right)_{\alpha=0} =$$

$$\left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F\left(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\right)}{\partial \tilde{q}(t)} \frac{d\tilde{q}(t)}{d\alpha} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F\left(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\right)}{\partial \dot{\tilde{q}}(t)} \frac{d\dot{\tilde{q}}(t)}{d\alpha} dt\right)_{\alpha=0} =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)}{\partial q(t)} \eta(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)}{\partial \dot{q}(t)} \dot{\eta}(t) dt \equiv$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial q} \eta dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial q} \eta dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \eta \mid_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \eta dt \quad (543)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) \eta dt \quad (544)$$

Так как $\eta(t)$ гладкая и на нее наложены только условия (539,540), то из (542) и (544) получаем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (545)$$

для функции $q(t)$ на которой функционал (537), при условиях (535,536), достигает экстремального значения.

Рассмотренный случай легко обобщается на случай нескольких обобщенных координат: По прежнему рассматриваем набор гладких кривых (воображаемых траекторий) проходящих через две заданные точки

$$\tilde{q}_i(t_1) = q_i^{(1)}, \quad i = 1, \ldots, s, \quad (546)$$

$$\tilde{q}_i(t_2) = q_i^{(2)}, \quad i = 1, \ldots, s. \quad (547)$$

Функционал (537) перейдет в

$$J[\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_s] = \int_{t_1}^{t_2} F\left(\tilde{q}_1(t), \ldots, \tilde{q}_s(t), \dot{\tilde{q}}_1(t), \ldots, \dot{\tilde{q}}_s(t), t\right) dt. \quad (548)$$

Также как и для одномерного случая, для нахождения экстремальных траекторий представим виртуальные перемещения или вариации функций как

$$\tilde{q}_1(t) - q_i(t) = \delta q_i(t) = \alpha \eta_i(x), \quad (549)$$

где $\eta_i(x)$ гладкие функции, которые согласно (546,547) удовлетворяет условиям

$$\eta_i(t_1) = 0, \quad (550)$$

$$\eta_i(t_2) = 0, \quad (551)$$

Определение (541) и условие (542) для экстремума остаются в силе. Тогда аналогично (544) получаем

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^s \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_{\ i}}\right)\eta_i dt, \tag{552}$$

откуда окончательно получаем систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, s \tag{553}$$

для функций $q_i(t)$ на которых функционал (548), при условиях (546,547), достигает экстремального значения.

Действие. Виртуальные траектории. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода из принципа наименьшего действия Гамильтона. Действием называется функционал

$$S[\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_s] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\tilde{q}_1(t), \ldots, \tilde{q}_s(t), \dot{\tilde{q}}_1(t), \ldots, \dot{\tilde{q}}_s(t), t\right)dt, \tag{554}$$

где L есть функция Лагранжа.

Теперь мы можем сформулировать принцип наименьшего действия Гамильтона. Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система занимает положения определяемые ур. (546) и (547) соответственно. Тогда между этими положениями система движется таким образом, что функционал действия имеет экстремальное значение. Справедливость принципа следует из ур. (553) в которых нужно заменить функцию F на L, в результате чего получаем известные ур. Лагранжа (268) (с $Q_j^d = 0, j = 1, \ldots, s$), которые при данных условиях, также как и принцип наименьшего действия Гамильтона, справедливы для систем с идеальными голономными связями и обобщенно-потенциальными силами. Можно показать, что при достаточно малой разнице $t_2 - t_1$ функционал действия имеет минимальное значение на действительной траектории.

41 Переход к методу Гамильтона посредством преобразования Лежандра. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона

Обобщенная энергия (277) как функция обобщенных координат, импульсов и времени называется функцией Гамильтона

$$H(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s, t) \equiv \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - L. \tag{555}$$

Покажем сперва, что обобщенную энергию можно представить как функцию обобщенных координат, импульсов и времени. Дифференцируя (555), получаем (первый дифференциал не зависит от выбора переменных)

$$dH(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s,t) = d\sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\dot q_j\right) - dL = d\sum_j p_j\dot q_j - dL =$$
$$\sum_j dp_j\dot q_j + \sum_j p_j d\dot q_j - \sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j\right) - \sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}d\dot q_j\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt =$$
$$\sum_j \dot q_j dp_j - \sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt. \quad (556)$$

При выводе (556) мы использовали определение обобщенного импульса (274). Уравнение (556) показывает, что дифференциал H может быть записан через дифференциалы обобщенных координат импульсов и времени. Таким образом, H действительно является функцией обобщенных координат, импульсов и времени.

С другой стороны, согласно определению

$$dH(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s,t) = \sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j\right) + \sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt. \quad (557)$$

Сравнивая (556) и (557), получаем

$$\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial p_j} & = \dot q_j\\ \frac{\partial H}{\partial q_j} & = -\frac{\partial L}{\partial q_j} \quad j = 1,\ldots,s.\end{cases} \quad (558)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (559)$$

С учетом (275), вместо (558) получаем

$$\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial p_j} & = \dot q_j\\ \frac{\partial H}{\partial q_j} & = -\dot p_j + Q_j^d \quad j = 1,\ldots,s.\end{cases} \quad (560)$$

Система $2s$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (560) является системой уравнений Гамильтона. Она эквивалентна системе s дифференциальных уравнений второго порядка Лагранжа (268). В системе уравнений Лагранжа фигурируют обобщенные координаты q_j и их скорости $\dot q_j \equiv \frac{dq_j}{dt}$. В системе уравнений Гамильтона используются обобщенные координаты q_j и импульсы p_j, которые являются независимыми переменными.

Преобразование Лежандра Пусть имеем функцию $f(x,y)$, ее дифференциал

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \quad (561)$$

Обозначим
$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv u \tag{562}$$
Введем функцию
$$g(x,y) = f(x,y) - ux. \tag{563}$$
Тогда
$$dg = df - udx - xdu = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy - udx - xdu = \frac{\partial f}{\partial y}dy - xdu, \tag{564}$$
то есть g есть функция от y и u. С другой стороны
$$dg = \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial u}du, \tag{565}$$
откуда
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{566}$$
$$\frac{\partial g}{\partial u} = -x. \tag{567}$$
При выводе уравнений Гамильтона было $f = L$, $g = -H$; $x = \dot{q}$, $y = q$, $u = p$.

Закон сохранения H Вычислим полную производную
$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) + \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ \sum_j \left((-\dot{p}_j + Q_j^d)\dot{q}_j\right) + \sum_j \left(\dot{q}_j\dot{p}_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ \sum_j \left(Q_j^d\dot{q}_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned} \tag{568}$$
что соответствует ранее полученному ур. (276). При выводе (568) мы использовали уравнения Гамильтона (560).

42 Циклические координаты в методе Гамильтона. Метод Рауса.

При наличии циклических координат и $Q_j^d = 0$ система уравнений Гамильтона (560) обладает преимуществом по сравнению с системой уравнений Лагранжа (268). Действительно, пусть q_j циклическая координата (то есть Лагранжиан не зависит от этой координаты), тогда, согласно (558), гамильтониан также не зависит от q_j. Однако Лагранжиан все равно зависит от соответствующей обобщенной скорости $\dot{q}_j$
$$L = L\left(q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{j-1}, \dot{q}_j, \dot{q}_{j+1}, \ldots, \dot{q}_s, t\right). \tag{569}$$

В методе же Гамильтона ($p_j \equiv \alpha = const$)

$$H = H\left(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_s, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_{j-1}, \alpha, \dot{p}_{j+1}, \dots, \dot{p}_s, t\right). \qquad (570)$$

Здесь нужно решать задачу с $s-1$ переменной. После ее решения q_j можно найти прямым интегрированием из $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$.

При наличии циклических координат бывает удобно сделать преобразование Лежандра только для циклических координат. Получается метод, как бы, промежуточный между методом Лагранжа и Гамильтона - метод Рауса.

Рассмотри данный метод. Сделаем преобразования Лежандра для части скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, l < s$. Для этого, согласно (555) вводим функцию Рауса

$$R(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_l, \dot{q}_{l+1}, \dots, \dot{q}_s, t) = \sum_j^l \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - L. \qquad (571)$$

Согласно (558) замечаем, что производные по переменным для которых не делалось преобразование Лежандра ($q_1, \dots, q_s, \dot{q}_{l+1}, \dots, \dot{q}_s$ в данном случае) от "новой"и "старой"функций (R и L в данном случае) отличаются знаком. Производные же от "новой"функции по новым переменным ($p_1, \dots, p_l$ в данном случае) равняются исходным переменным ($\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l$ в данном случае). Поэтому, аналогично выводу (558) имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial p_j} & = \dot{q}_j \\ \frac{\partial R}{\partial q_j} & = -\frac{\partial L}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, l. \end{cases} \qquad (572)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} & = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial R}{\partial q_j} & = -\frac{\partial L}{\partial q_j} \quad j = l+1, \dots, s. \end{cases} \qquad (573)$$

С учетом (268,275), вместо (572) и (573) получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial p_j} & = \dot{q}_j \\ \frac{\partial R}{\partial q_j} & = -\dot{p}_j + Q_j^d \quad j = 1, \dots, l. \end{cases} \qquad (574)$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = -Q_j^d \quad j = l+1, \dots, s, \qquad (575)$$

соответственно. Система (574) имеет вид уравнений Гамильтона, а система (575) имеет вид уравнений Лагранжа. Если координаты $q_1, \dots, q_l$ являются циклическими, то

$$p_j \equiv \alpha_j = const, \quad j = 1, \dots, l \qquad (576)$$

и функция Рауса

$$R = R(q_{l+1}, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \dot{q}_{l+1}, \dots, \dot{q}_s, t) \qquad (577)$$

зависит только от $s - l$ переменных.

43 Укороченное действие. Принцип Мопертюи. Принцип Мопертюи для материальной точки, на которую не действуют внешние силы.

При выводе уравнений Лагранжа из принципа наименьшего действия Гамильтона мы рассматривали вариацию интеграла действия (554). При этом область интегрирования не менялась (время движения было одним и тем же) и вариация траектории в начальный и конечный момент времени полагалась равно нулю (все виртуальные траектории проходили через две заданные точки (546,547)).

Сейчас мы выведем выражение для первой вариации, не делая этого предположения, то есть рассмотрим задачу вариационного исчисления в общем случае подвижных концов. Такую вариацию будем обозначать Δ. Рассмотрим сначала соответствующую одномерную задачу, когда имеется одна обобщенная координата q. Согласно сказанному выше, вместо (537) имеем

$$J[\tilde{q}] = \int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} F\left(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\right) dt, \tag{578}$$

где в отличие от (537) начальный и конечный промежуток времени также как и траектории зависят от переменной α. Вариацией функционала называют величину

$$\Delta J = \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \cdot \alpha, \tag{579}$$

где в отличие от (541) подразумевается и дифференцирование по α нижнего и верхнего пределов интегрирования.

Вычислим первую вариацию:

$$\Delta J = \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \cdot \alpha = \alpha \left(\frac{d}{d\alpha} \int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} F\left(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\right) dt\right)_{\alpha=0} =$$
$$F\left(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2\right) \left(\frac{dt_2(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha - F\left(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1\right) \left(\frac{dt_1(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + \delta J =$$
$$F(t_2)\delta t_2 - F(t_1)\delta t_1 + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q \,\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) \delta q dt, \tag{580}$$

где мы обозначили

$$\delta t_i = \left(\frac{dt_i(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha, \quad i = 1, 2 \tag{581}$$

есть вариация начального и конечного времени интервала интегрирования,

$$t_i(0) = t_i, \quad i = 1, 2. \tag{582}$$

δJ фактически было получено при выводе (544), где однако надо учитывать, что на функции $\eta(t)$ (и следовательно $\delta q = \alpha\eta$) не наложены условия (539,540), и поэтому вне интегральное слагаемое не зануляется. Введем Δ вариацию функции по формуле

$$\Delta q(t_i) \equiv \delta q(t_i) + \dot{q}_i \delta t_i, \quad i = 1, 2. \tag{583}$$

Δ вариация складывается из изменения вида функции (δ вариация) и из приращения функции за счет изменения (вариации) ее аргумента (соответствует первому дифференциалу функции в точке).

С учетом (583), вместо (580) можем написать

$$\Delta J = \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)\delta t \,|_{t_1}^{t_2} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\Delta q \,|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt. \tag{584}$$

Для случая нескольких координат, аналогично (584), получаем

$$\Delta J = \left(F - \sum_j \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_j\right)\delta t \,|_{t_1}^{t_2} + \sum_j \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\Delta q_j \,|_{t_1}^{t_2} + \sum_j \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j dt. \tag{585}$$

Принцип наименьшего действия Мопертюи. Укороченным действием называется функционал

$$W[\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_s] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j\left(\tilde{q}_1(t), \ldots, \tilde{q}_s(t), \dot{\tilde{q}}_1(t), \ldots, \dot{\tilde{q}}_s(t)\right)\dot{q}_j dt. \tag{586}$$

Принцип наименьшего действия Мопертюи справедлив для систем с идеальными голономными связями, обобщенно потенциальными силами, и для которых $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Согласно этому принципу на реальной траектории реализуется экстремум укороченного действия при условии, что рассматриваются только траектории для которых

$$H = const \tag{587}$$

и

$$\Delta q(t_1) = \Delta q(t_2) = 0. \tag{588}$$

Действительно, согласно (585) имеем

$$\Delta W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \dot{q}_j dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} H dt + \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt =$$

$$H\delta t \,|_{t_1}^{t_2} + \left(L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_j\right)\delta t \,|_{t_1}^{t_2} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Delta q_j \,|_{t_1}^{t_2} + \sum_j \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j dt$$
$$= 0. \tag{589}$$

Первое и второе слагаемые во второй строчке (589) сокращаются вследствие определения функции Гамильтона (555), третье слагаемое равно нулю согласно условию (588), последнее слагаемое равно нулю, так система движется по реальной траектории. При выводе (589) мы использовали, что в силу (587)

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = H\delta t \,|_{t_1}^{t_2} . \tag{590}$$

Далее будем рассматривать случай когда связи не зависят от времени ($T = T^{(2)}$, см. (286,288)) и потенциальная энергия не зависит от скоростей ($U = U^{(0)}$). В этом случае, согласно теореме Эйлера об однородных функциях (228), имеем

$$\sum_j p_j \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2T^{(2)} = 2T \tag{591}$$

и функционал (586) переходит в

$$W[\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_s] = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt. \tag{592}$$

Принцип Мопертюи для материальной точки, на которую не действуют внешние силы. Если теперь на систему не действуют активные силы ($U = U^{(0)} = 0$), то принцип Мопертюи принимает вид

$$\left(\frac{dW}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} 2T dt\right)_{\alpha=0} = 2T\left(\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} dt\right)_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{d\alpha}\left(t_2(\alpha) - t_1(\alpha)\right)_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow (t_2 - t_1) = extr. \tag{593}$$

При выводе (593) мы учли, что при $U = U^{(0)} = 0$, согласно (587), $T = H = const$. Условие (593) означает, что движение по (достаточно близким к истинной) виртуальным траекториям с заданной кинетической энергией и заданными начальными и конечными положениями будет занимать больше времени (если реализуется минимум) по сравнению с движением по истинной траектории.

44 Принцип Мопертюи в форме Якоби-Герца. Фундаментальный метрический тензор. Геодезические линии.

Метрический тензор Рассмотрим квадрат дифференциала длины для МТ

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = d\mathbf{r}^2 = \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, \ldots, q_s)}{\partial q_j} dq_j\right)^2 =$$
$$\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, \ldots, q_s)}{\partial q_j} dq_j \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)}{\partial q_k} dq_k =$$
$$\sum_{jk} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} dq_j dq_k = \sum_{jk} g_{jk} dq_j dq_k, \tag{594}$$

где g_{jk} есть метрический тензор.

Принцип Мопертюи в форме Якоби-Герца Так как мы рассматриваем случай когда связи не зависят от времени, то ($T = T^{(2)}$, см. (278,286,288))

$$T = \frac{1}{2} \sum_{jk} t_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{jk} t_{jk} \frac{dq_j dq_k}{dt^2}. \tag{595}$$

Введем по определению квадрат дифференциала длинны

$$ds^2 \equiv \sum_{jk} t_{jk} dq_j dq_k. \tag{596}$$

С учетом (278, 594) замечаем, что в ds^2 определенный ур. (596) вносят вклад квадраты дифференциалов длинны отдельных МТ с весами равными их массам. С учетом (595,596) получаем

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{597}$$

и

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2T}}. \tag{598}$$

С учетом (598) перепишем функционал укороченного действия (592) в виде

$$W[\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_s] = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = \int_1^2 \sqrt{2T} ds =$$
$$\int_1^2 \sqrt{2(E - U(q_1, \ldots, q_s))} ds. \tag{599}$$

Принцип Мопертюи в форме Якоби-Герца говорит, что при движении из заданной точки 1 в заданную точку 2 истинная траектория является экстремалью функционала (599). Принцип Мопертюи справедлив при условиях (587,588). В (599) условие (587) нами учтено заменой $T = E - U(q_1, \ldots, q_s), E = const$. В ур. (599) время исключено, условие (588) означает, что интеграл берется между двумя фиксированными точками пространства, то есть имеем задачу вариационного исчисления с закрепленными концами. Если теперь задать траекторию параметрически (в качестве параметра можно взять например длину дуги s, какую нибудь из координат или любой другой параметр), то уравнения Эйлера (545) (где вместо t будет соответствующий параметр) будут уравнениями для нахождения истинной траектории.

Геодезические линии. Если теперь на систему не действуют активные силы ($U = U^{(0)} = 0$), то принцип Мопертюи в форме Якоби-Герца принимает вид

$$\int_1^2 \sqrt{2E} ds = \sqrt{2E} \int_1^2 ds = extr. \tag{600}$$

Экстремали интеграла $\int_1^2 ds$ называются геодезическими линиями. Таким образом, в отсутствии активных сил система движется по геодезической линии. Например при движении одной МТ на плоскости это будет прямая линии, при движении по сфере это будет дуга большого круга.

45 Вывод канонических уравнений Гамильтона из вариационного принципа.

Аналогично выводу уравнений Лагранжа из *интегрального* вариационного принципа, можно получить уравнения Гамильтона. В методе Гамильтона координаты и импульсы являются независимыми переменными, поэтому в каждый момент времени положение системы определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и импульсами $p_1, p_2, \ldots, p_s$ или точкой в *фазовом пространстве*. Фазовое пространство это воображаемое пространство $2s$ измерений на координатных осях которого откладываются обобщенные координаты и импульсы. С течением времени положение меняется, и точка описывает в фазовом пространстве кривую, называемую траекторией.

Интегральный вариационный принцип можно сформулировать аналогично принцип наименьшего действия Гамильтона.

Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система занимает определенные положения в фазовом пространстве. Тогда между этими положениями система движется таким образом, что функционал

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H\left(\tilde{q}_1(t), \ldots, \tilde{q}_s(t), \tilde{p}_1(t), \ldots, \tilde{p}_s(t), t\right) \right) dt \tag{601}$$

имеет экстремальное значение. Действительно, согласно ур. Эйлера (553) экстремали функционала (601) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sum_j p_j\dot{q}_j - H)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(\sum_j p_j\dot{q}_j - H)}{\partial \dot{q}_i} = 0 \\ \frac{\partial(\sum_j p_j\dot{q}_j - H)}{\partial p_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(\sum_j p_j\dot{q}_j - H)}{\partial \dot{p}_i} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \dot{p}_i = 0 \\ \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{602}$$

что совпадает с системой уравнений Гамильтона (560) с $Q_j^d = 0$. Таким образом получаем, что реальная траектория, удовлетворяющая уравнениям Гамильтона (560) является экстремалью функционала (601). И наоборот, траектория являющая экстремалью функционала (601) удовлетворяет уравнениям Гамильтона (560).

46 Определение канонических преобразований. Производящие функции различных типов, связь между ними.

В качестве обобщенных координат q_i могут выступать любые s величин однозначно определяющие положение системы и обращающие уравнения связей в тождество. Вид уравнений Лагранжа не зависит от выбора координат, т.е. уравнения Лагранжа инвариантны относительно преобразований

$$Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_s, t), \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{603}$$

Такие преобразования называют точечными. Рациональный выбор независимых координат может существенно упростить конкретный вид уравнений Лагранжа и существенно облегчить решение задачи. Это является одним из главных преимуществ метода Лагранжа. Наряду с уравнениями Лагранжа при точечном преобразовании сохраняют вид и уравнения Гамильтона. В методе Гамильтона, однако, координаты и импульсы являются независимыми переменными. Поэтому можно предположить, что уравнения Гамильтона допускают более широкий класс преобразований

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s, t) \\ P_i = P_i(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s, t), \qquad i = 1, \ldots, s. \end{cases} \tag{604}$$

Однако не при всех преобразованиях (604) уравнения движения сохраняют вид уравнений Гамильтона. Нас будут интересовать преобразования при которых при произвольном гамильтониане H уравнения движения (в новых переменных) сохраняют вид уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \frac{\partial H'}{\partial P_j} &= \dot{Q}_j \\ \frac{\partial H'}{\partial Q_j} &= -\dot{P}_j \quad j = 1, \ldots, s, \end{cases} \tag{605}$$

вообще говоря, с другой функцией H'. Такие преобразования называют *каноническими*. Расширение класса допустимых преобразований является одним из существенных преимуществ метода Гамильтона.

Вид канонических преобразований лишает понятие обобщенных координат их первоначального смысла. В общем случае, переменные Q уже не будут иметь смысла пространственных координат. Это в в особенности видно из факта (как мы увидим далее), что возможны канонические преобразования которые меняют местами координаты и импульсы. Поэтому переменные Q_i и P_i часто называют канонически сопряженными переменными.

Найдем условие каноничности преобразований (604). Мы знаем, что истинная траектория является экстремалью функционала (601), то есть на истинной траектории

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right) dt = 0. \tag{606}$$

Из (606) следуют уравнения Гамильтона, и наоборот, из уравнений Гамильтона следует (606). Поэтому, если мы хотим, чтобы переменные Q_i и P_i были канонические необходимо и достаточно, чтобы на истинная траектория было и

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j P_j \dot{Q}_j - H' \right) dt = 0. \tag{607}$$

То есть условия (606) и (607) должны выполняться одновременно. Для этого достаточно потребовать, чтобы подынтегральные выражения отличались на полную производную от функции координат и импульсов:

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H = \sum_j P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t), \tag{608}$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i \\ H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{cases} \tag{609}$$

F_1 называется *производящей функцией* канонического преобразования первого типа. При заданной F_1 формулы (609) устанавливают связь между старыми (q_i, p_i) и новыми (Q_i, P_i) переменными.

Может оказаться удобным использовать производящую функцию, зависящую от q_i и P_i. В этом случае нужно провести преобразование Лежандра

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i, \tag{610}$$

где $F_2(q,P,t)$ есть производящая функция канонического преобразования второго типа. Подставляя (610) в (608), получаем

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H = -\sum_j \dot{P}_j Q_j - H' + \frac{d}{dt} F_2(q,P,t), \tag{611}$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \\ H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \end{cases} \tag{612}$$

Для двух оставшихся производящих функций

$$F_3(p,Q,t) = F_1(q,Q,t) - \sum_i p_i q_i \tag{613}$$

и

$$F_4(p,P,t) = F_1(q,Q,t) - \sum_i p_i q_i + \sum_i P_i Q_i \tag{614}$$

аналогично получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i \\ \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = -P_i \\ H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \end{cases} \tag{615}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i \\ \frac{\partial F_4}{\partial P_i} = Q_i \\ H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \end{cases} \tag{616}$$

47 Примеры канонических преобразований: тождественное преобразование, точечные преобразования, ортогональные преобразования.

Рассмотрим

$$F_2(q,P,t) = \sum_i q_i P_i. \tag{617}$$

Согласно (612) имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \\ H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_i = p_i \\ q_i = Q_i \\ H' = H. \end{cases} \tag{618}$$

т. о. получаем тождественное преобразование.

Для $F_2(q,P,t) = \sum_i f(q_1,\ldots,q_s,t)_i P_i$ получаем

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \Rightarrow Q_i = f(q_1,\ldots,q_s,t)_i, \tag{619}$$

т. о. получаем, что точечные преобразования являются частным случаем канонических преобразований.

Частным случаем точечных преобразований являются ортогональные преобразования $F_2(q,P,t) = \sum_{ij} a_{ji} q_i P_j$, где a_{ji} – ортогональная матрица. Согласно (612) имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \\ H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_i = \sum_j a_{ji} P_j \\ Q_j = \sum_i a_{ji} q_i \\ H' = H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_j = \sum_i a_{ji} p_i \\ Q_j = \sum_i a_{ji} q_i \\ H' = H. \end{cases} \tag{620}$$

Пусть $F_1(q,Q,t) = \sum_i q_i Q_i$, тогда согласно (609) имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i \\ H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_i = p_i \\ q_i = -P_i \\ H' = H. \end{cases} \tag{621}$$

Это преобразование меняет местами координаты и импульсы. Этот пример служит иллюстрацией равноправности координат и импульсов в методе Гамильтона. Это обстоятельство также явно следует из уравнений Гамильтона (602). При замене $q_i \to -p_i, p_i \to q_i$ они сохраняют свой вид.

48 Использование канонических преобразований в случае, когда все координаты циклические. Решение задачи о гармоническом осцилляторе методом канонических преобразований.

Допустим нам удалось найти каноническое преобразование при котором новый гамильтониан зависит только от новых импульсов

$$H' = H'(P_1, \ldots, P_s). \tag{622}$$

В этом случае уравнения Гамильтона (605) легко решаются

$$\begin{cases} \frac{\partial H'}{\partial P_j} = \dot{Q}_j = \omega_j = const \\ \frac{\partial H'}{\partial Q_j} = -\dot{P}_j = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_j = \omega_j t + \beta_j \\ P_j = \alpha_j = const. \end{cases} \tag{623}$$

В качестве примера рассмотрим каноническое преобразование с производящей функцией

$$F_1 = \frac{m}{2} \omega q^2 \operatorname{ctg} Q \tag{624}$$

для гармонического осциллятора с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \tag{625}$$

Из уравнений (609) имеем

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q \\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \end{cases} \tag{626}$$

Так как производящая функция (624) не содержит время, то

$$H' = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P. \tag{627}$$

Отсюда

$$\dot{Q} = \omega \Rightarrow Q = \omega t + \beta, \beta = const. \tag{628}$$

Подставляя (628) в первое из уравнений 626, получаем

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta) \tag{629}$$

Так как согласно (627)

$$P = \frac{E}{\omega}, \tag{630}$$

то (629) можно переписать в виде

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta) \tag{631}$$

49 Инварианты канонических преобразований. Скобки Пуассона и скобки Лагранжа. Доказательство инвариантности скобок Лагранжа.

При канонических преобразованиях уравнения Гамильтона сохраняют свой вид. Говорят, что уравнения Гамильтона инвариантны относительно канонических преобразований. Существуют и другие инварианты канонических преобразований – скобки Лагранжа и скобки Пуассона.

Пусть все координаты и импульсы являются функциями двух переменных u, v

$$p_i = p_i(u, v), \quad i = 1, \ldots, s \tag{632}$$

$$q_i = q_i(u, v), \quad i = 1, \ldots, s \tag{633}$$

Скобкой Лагранжа называется

$$\{u, v\}_{q,p} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right). \tag{634}$$

Пусть теперь заданы две функции обобщенных координат и импульсов

$$u = u(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s), \tag{635}$$

$$v = v(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s). \tag{636}$$

Тогда *скобкой Пуассона* называется

$$[u, v]_{q,p} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right). \tag{637}$$

Нетрудно показать, (см. § 8.3. Г. Голдстейн, Классическая механика, Физматгиз, 1975) что

$$\{u, v\}_{p,q} = \{u, v\}_{P,Q} \equiv \{u, v\}. \tag{638}$$

Таким образом, скобка Лагранжа является инвариантом канонических преобразований.

50 Фундаментальные скобки Лагранжа и Пуассона.

Пусть

$$u_i = u_i(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s), \quad i = 1, \ldots, 2s \tag{639}$$

есть независимые функции обобщенных координат и импульсов. Тогда обобщенные координаты и импульсы будут независимыми функциями переменных u_i:

$$q_i = q_i(u_1, \ldots, u_{2s}), \quad i = 1, \ldots, s, \tag{640}$$

$$p_i = p_i(u_1, \ldots, u_{2s}), \quad i = 1, \ldots, s. \tag{641}$$

Тогда для соответствующих скобок Лагранжа и Пуассона (см. доказательство ур. (8.44) в Г. Голдстейн, Классическая механика, Физматгиз, 1975) справедливо равенство

$$\sum_{l=1}^{2s} \{u_l, u_i\}[u_l, u_j] = \delta_{i,j}. \tag{642}$$

Важно отметить, что при доказательстве ур. (642) мы не использовали, что переменные q_i и p_i являются канонически сопряженными, использовалась только независимость функций (639). Поэтому равенство (642) справедливо для любых независимых переменных и в частности для любой системы канонических переменных (хотя инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований нами еще не доказана).

Фундаментальными скобками Лагранжа называются

$$\{q_i, p_j\} = -\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}, \tag{643}$$

$$\{q_i, q_j\} = 0, \tag{644}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0. \tag{645}$$

Фундаментальные скобки Лагранжа (643 - 645) легко вычисляются с помощью определения (634). Так как скобки Лагранжа инвариантны при канонических преобразованиях, то конечно и фундаментальные скобки Лагранжа тоже инвариантны.

Вычислим теперь фундаментальные скобки Пуассона $[q_i, p_j], [q_i, q_j], [p_i, p_j]$. Для этого возьмем в ур. (642) в качестве функций $u_1, \ldots, u_{2s}$ канонически сопряженные переменные $q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s$ и положим $u_i = q_i$ и $u_j = p_j$. Так как переменные $u_i = q_i$ и $u_j = p_j$ различны, то из (642) получаем

$$\sum_{l=1}^{s} \{q_l, q_i\}[q_l, p_j] + \sum_{l=1}^{s} \{p_l, q_i\}[p_l, p_j] = 0. \tag{646}$$

Так как, в соответствии с (643, 644)

$$\{q_l, q_i\} = 0, \tag{647}$$

$$\{p_l, q_i\} = -\delta_{il}, \tag{648}$$

то из получаем, что

$$[p_i, p_j] = 0. \tag{649}$$

Скобка Лагранжа (649) конечно легко вычисляется в системе канонических переменных $q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s$ согласно определению (637). В этом случае мы бы получили

$$[p_i, p_j]_{q,p} = 0.$$

При выводе (649) мы использовали ур. (642, 643, 644) инвариантные относительно канонических преобразований, и поэтому в ур. (649) мы не отмечаем в какой системе канонических переменных вычислена фундаментальная скобка Пуассона $[p_i, p_j]$.

Положив $u_i = p_i$, $u_j = q_j$ и $u_i = q_i$, $u_j = q_j$ соответственно получаем

$$[q_i, q_j] = 0, \tag{650}$$

$$[q_i, p_j] = -[p_j, q_i] = \delta_{ij}. \tag{651}$$

Фундаментальные скобки Пуассона (650, 651) аналогично (649) являются инвариантами канонических преобразований.

51 Доказательство инвариантности скобок Пуассона относительно канонических преобразований.

Скобки Пуассона являются инвариантами канонических преобразований. Действительно

$$[u,v]_{Q,P} = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial v}{\partial P_k} - \frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial v}{\partial Q_k} \right) =$$

$$\sum_k \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial Q_k} \right) \sum_j \left(\frac{\partial v}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_k} + \frac{\partial v}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_k} \right) -$$

$$\sum_k \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} + \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} \right) \sum_j \left(\frac{\partial v}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial v}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \right) =$$

$$\sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial q_j} \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial q_j}{\partial P_k} - \frac{\partial q_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \right) +$$

$$\sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_j} \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial p_j}{\partial P_k} - \frac{\partial q_i}{\partial P_k}\frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \right) +$$

$$\sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_j} \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\frac{\partial q_j}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \right) +$$

$$\sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial p_j} \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\frac{\partial p_j}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \right) =$$

$$\sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial q_j}[q_i,q_j]_{Q,P} + \sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_j}[q_i,p_j]_{Q,P} +$$

$$\sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_j}[p_i,q_j]_{Q,P} + \sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial p_j}[p_i,p_j]_{Q,P} =$$

$$= \sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_j}\delta_{ij} - \sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_j}\delta_{ij} =$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = [u,v]_{q,p}. \qquad (652)$$

Утверждение доказано. При выводе (652) мы использовали инвариантность при канонических преобразованиях фундаментальных скобок Пуассона.

52 Свойства скобок Пуассона. Тождество Якоби, его доказательство.

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами.

$$[u,v] = -[v,u] \quad ([u,u]=0), \tag{653}$$

$$[u,C] = 0 \quad (C = const), \tag{654}$$

$$[u+v,w] = [u,w]+[v,w], \tag{655}$$

$$[u,vw] = [u,v]w + [u,w]v, \tag{656}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}[u,v] = [\frac{\partial u}{\partial q_i}, v] + [u, \frac{\partial v}{\partial q_i}], \tag{657}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}[u,v] = [\frac{\partial u}{\partial p_i}, v] + [u, \frac{\partial v}{\partial p_i}], \tag{658}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[u,v] = [\frac{\partial u}{\partial t}, v] + [u, \frac{\partial v}{\partial t}], \tag{659}$$

Тождество Якоби

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0. \tag{660}$$

Свойство (653) следует из определения. Свойства (654 - 659) следуют из элементарных правил дифференцирования. См. доказательство ур. (8.59) в [Г. Голдстейн, Классическая механика, Физматгиз, 1975] для доказательство Тождества Якоби (660).

53 Скобки Пуассона и интегралы движения.

С помощью скобок Пуассона можно записать полную производную по времени любой функции координат и импульсов $u(q_1,\ldots,q_s,q_1,\ldots,q_s,t)$

$$\frac{du}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = [u,H] + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{661}$$

Если u не зависит от t, то

$$\frac{du}{dt} = [u,H]. \tag{662}$$

Тогда если u – интеграл движения, $[u,H]=0$ и наоборот. Мы получаем критерий для того, чтобы судить какая величина является интегралом движения, а какая нет. Если известны два интеграла движения $u(q,p,t) = const$ и $v(q,p,t) = const$, то можно получить третий интеграл движения $[u,v] = const$ (теорема Пуассона). Действительно, согласно (661)

$$\frac{d}{dt}[u,v] = \frac{\partial [u,v]}{\partial t} + [[u,v],H]\,. \tag{663}$$

С учетом (659,660) имеем

$$\frac{d}{dt}[u,v] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right] - [[v,H],u] - [[H,u],v] =$$

$$\left[u, \frac{\partial v}{\partial t} + [v,H]\right] + \left[\frac{\partial u}{\partial t} + [u,H], v\right] = 0. \tag{664}$$

Однако применяя теорему Пуассона, не всегда получаются новые интегралы движения. В некоторых случая скобки Пуассона могут свестись к постоянной, или вновь полученный интеграл может оказаться функцией исходных интегралов.

Пример Пусть $u = L_x$, $v = L_y$, тогда

$$[L_x, L_y] = \frac{\partial L_x}{\partial x}\frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x}\frac{\partial L_y}{\partial x} + \frac{\partial L_x}{\partial y}\frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y}\frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z}\frac{\partial L_y}{\partial z} = xp_y - yp_x = L_z. \quad (665)$$

54 Бесконечно малые канонические преобразования. Движение системы как бесконечно малое каноническое преобразование.

Рассмотрим *бесконечно малое* каноническое преобразование с производящей функцией

$$F_2(q, P, t) = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G(q, P, t), \varepsilon \ll 1. \quad (666)$$

Функция (666) отличается от производящей функции тождественного преобразования (617) на бесконечно малую функцию $\varepsilon G(q, P, t), \varepsilon \ll 1$. При этом новые координаты и импульсы будут отличаться от старых на бесконечно малую величину. Действительно согласно (612) имеем (ср. с (618))

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \\ H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_i = P_i + \varepsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial q_i} \\ Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P_i} \\ H' = H + \varepsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial t}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial q_i} \\ \delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P_i} \\ H' = H + \varepsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial t}. \end{cases} \quad (667)$$

Так как P_i бесконечно мало отличается от p_i, то с точностью до величин первого порядка малости в ур. (667) можно заменить $G(q, P, t)$ на $G(q, p, t)$. Таким образом получаем

$$\begin{cases} \delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q_i} \\ \delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i} \\ H' = H + \varepsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial t}. \end{cases} \quad (668)$$

Функцию G часто называют производящей функцией бесконечно малого канонического преобразования.

Рассмотрим пример бесконечно малого канонического преобразования при котором $G(q, p, t) = H(q, p, t)$, $\epsilon = dt$. Тогда

$$\begin{cases} \delta p_i = -dt \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i} = \dot{p}_i dt = dp_i \\ \delta q_i = dt \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i} \dot{q}_i dt = dq_i. \end{cases} \quad (669)$$

Уравнение (669) показывает, что изменение координат и импульсов при таком бесконечно малом каноническом преобразовании совпадает с их изменением при движении системы в соответствии с уравнениями Гамильтона. Таким образом, движение механической системы можно рассматривать как непрерывно совершающееся бесконечно малое каноническое преобразование, производящей функцией которого является Гамильтониан. Так как два последовательных канонических преобразования также будут каноническим преобразованием, связь между $q(t), p(t)$ и $q(t+\Delta t), p(t+\Delta t)$ можно получить с помощью некоторого канонического преобразования. Нахождение производящей функции такого преобразования эквивалентно решению задачи о движении системы.

55 Бесконечно малые канонические преобразования и законы сохранения.

Рассмотрим приращение некоторой функции $u(q,p,t)$ в результате приращения ее аргументов определяемого бесконечно малым каноническим преобразованием. Согласно (667), с точностью до линейных по ε слагаемых, имеем

$$\delta u = u(Q,P,t) - u(q,p,t) = u(q+\delta q, p+\delta p, t) - u(q,p,t) = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}\delta p_i \right) = \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \varepsilon[u,G]. \tag{670}$$

Если G есть интеграл движения, то согласно (661)

$$[H,G] = -[G,H] = \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{671}$$

Тогда, согласно (668), положив в (670) $u = H$, получаем

$$H' = H(q,p,t) + \varepsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial t} = H(q,p,t) + \varepsilon[H,G] = H(Q,P,t). \tag{672}$$

То есть зависимость нового гамильтониана от новых переменных будет совпадать с зависимостью исходного гамильтониана от старых. Или, иными словами, гамильтониан инвариантен при бесконечно малых канонических преобразованиях производящая функция которых является интегралом движения.

В случае H независящего явно от времени вместо ур. (672) имеем

$$H(q,p) = H(q+\delta q, p+\delta p). \tag{673}$$

Ур. (673) отражает свойства симметрии гамильтониана. Согласно сказанному выше, производящая функция соответствующая данным $\delta q, \delta p$, определяемым ур. (668), будет интегралом движения. Поэтому интегралы движения можно получить исследуя свойства симметрии гамильтониана в смысле ур. (673).

Пусть, например, координата q_i является циклической. Тогда гамильтониан не будет зависеть от q_i и преобразования симметрии не меняющие гамильтониан будут иметь вид

$$\begin{cases} \delta p_j = 0 \\ \delta q_j = \varepsilon \delta_{ij}. \end{cases} \tag{674}$$

Соответствующая производящая функция есть $G = p_i$. Таким образом, получаем уже известный результат, что обобщенный импульс соответствующий циклической координате сохраняется.

Пусть гамильтониан симметричен относительно поворота вокруг некоторой оси, которую обозначим за z. В соответствии с (418) при повороте на бесконечно малый угол $d\varphi$ для приращения декартовых координат и импульсов имеем

$$\begin{cases} X_i = x_i - y_i d\varphi \\ Y_i = y_i + x_i d\varphi \\ Z_i = z_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_i = -y_i d\varphi \\ \delta y_i = x_i d\varphi \\ \delta z_i = 0, \end{cases} \tag{675}$$

$$\begin{cases} P_{Xi} = p_{xi} - p_{yi} d\varphi \\ P_{Yi} = p_{yi} + p_{xi} d\varphi \\ P_{Zi} = p_{zi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta p_{xi} = -p_{yi} d\varphi \\ \delta p_{yi} = p_{xi} d\varphi \\ \delta p_{zi} = 0. \end{cases} \tag{676}$$

Соответствующая производящая функция есть

$$G = \sum_i (x_i p_{yi} - y_i p_{xi}) = L_z, \tag{677}$$

в качестве параметра ϵ выступает $d\varphi$. Производящая функция есть z компонента момента количества движения. Так как ось z произвольна, то в общем случае

$$G = (\mathbf{L}, \mathbf{n}), \tag{678}$$

где $\mathbf{n}$ есть единичный вектор вдоль оси поворота.

56 Интегральные инварианты Пуанкаре.

Рассмотрим некоторую область σ плоскости uv. Непрерывное отображение (632, 633) задает двумерную поверхность в фазовом пространстве. Отображение (632, 633) для заданного i есть проекция данной поверхности на плоскость $q_i p_i$. Обозначим через s_i площадь данной проекции.

Координаты и импульсы другой системы канонических переменных также будут функциями переменных u и v

$$P_i = P_i(u, v), \quad i = 1, \dots, s \tag{679}$$

$$Q_i = Q_i(u, v), \quad i = 1, \dots, s. \tag{680}$$

Обозначим через S_i площадь проекции рассматриваемой поверхности в фазовом пространстве на плоскость Q_iP_i. Согласно теореме Пуанкаре

$$J_2 = \sum_i s_i = \sum_i S_i. \tag{681}$$

То есть J_2 есть интегральный инвариант (второго порядка) канонического преобразования. Докажем теорему. С одной стороны

$$\sum_i s_i = \sum_i \iint_{s_i} dq_i dp_i = \sum_i \iint_\sigma \frac{\partial(q_i,p_i)}{\partial(u,v)} dudv =$$
$$\iint_\sigma \sum_i \frac{\partial(q_i,p_i)}{\partial(u,v)} dudv = \iint_\sigma \{u,v\}_{q,p} dudv = \iint_\sigma \{u,v\} dudv. \tag{682}$$

С другой стороны

$$\sum_i S_i = \sum_i \iint_{S_i} dQ_i dP_i = \sum_i \iint_\sigma \frac{\partial(Q_i,P_i)}{\partial(u,v)} dudv =$$
$$\iint_\sigma \sum_i \frac{\partial(Q_i,P_i)}{\partial(u,v)} dudv = \iint_\sigma \{u,v\}_{Q,P} dudv = \iint_\sigma \{u,v\} dudv. \tag{683}$$

Таким образом, теорема доказана. Также можно показать, что сумма площадей всех возможных проекций четырехмерной, шестимерной и т.д. поверхностей в фазовом пространстве на подпространства $q_ip_iq_jp_j$, $q_ip_iq_jp_jq_kp_k$ и т.д. являются инвариантами канонических преобразований. Последний (полный) интегральный инвариант есть объем некоторой области в фазовом пространстве

$$J_{2n} = \Gamma = \int \cdots \int_\Gamma dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n. \tag{684}$$

57 Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема.

Рассмотрим некоторую область в фазовом пространстве объемом Γ_0. Рассмотрим движение системы с начальными значениями координат и импульсов $q_{i0} = q_i(t), p_{i0} = p_i(t)$ в момент времени t из выбранной области. То есть рассмотрим ансамбль состоящий из систем с одинаковым гамильтонианом, но разными начальными условиями. В момент времени $t+\Delta t$ каждая система займет новое положение с координатами и импульсами $q_i = q_i(t+\Delta t)$, $p_i = p_i(t+\Delta t)$ зависящими от начальных условий. Таким образом, каждая точка $q_{10}, \dots, q_{s0}, p_{10}, \dots, p_{s0}$ выбранной области перейдет в некоторую другую точку $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$ и рассматриваемый ансамбль займет новую область в фазовом пространстве объемом Γ. Траектории в фазовом пространстве не пересекаются и поэтому все точки $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$ различны.

Соответствующие объемы в моменты времени t и $t + \Delta t$ равны

$$\Gamma_0 = \Gamma(t) = \int_{\Gamma_0} dq_{10}, \ldots, dq_{s0}, dp_{10}, \ldots, dp_{s0}, \tag{685}$$

$$\Gamma = \Gamma(t + \Delta t) = \int_{\Gamma} dq_1, \ldots, dq_s, dp_1, \ldots, dp_s = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial(q,p)}{\partial(q_0,p_0)} dq_{10}, \ldots, dq_{s0}, dp_{10}, \ldots, dp_{s0}. \tag{686}$$

Вычислим производную $\frac{d\Gamma}{dt}$. Для этого вычислим якобиан в ур. (686) с точностью до линейных слагаемых по Δt. Для частных производных составляющих матрицу Якоби, с точность до линейных по Δt слагаемых имеем

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} = \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t + O(\Delta t^2), \tag{687}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_{j0}} = \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t + O(\Delta t^2), \tag{688}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_{j0}} = \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial p_{j0}} \Delta t + O(\Delta t^2), \tag{689}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{j0}} = \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{j0}} \Delta t + O(\Delta t^2). \tag{690}$$

С учетом (687-690)

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(q_0,p_0)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \dot{q}_{10}}{\partial q_{10}} \Delta t & \frac{\partial \dot{q}_{10}}{\partial q_{20}} \Delta t & \ldots & \frac{\partial \dot{q}_{10}}{\partial p_{s0}} \Delta t \\ \frac{\partial \dot{q}_{20}}{\partial q_{10}} \Delta t & 1 + \frac{\partial \dot{q}_{20}}{\partial q_{20}} \Delta t & \ldots & \frac{\partial \dot{q}_{20}}{\partial p_{s0}} \Delta t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \dot{p}_{s0}}{\partial q_{10}} \Delta t & \frac{\partial \dot{p}_{s0}}{\partial q_{20}} \Delta t & \ldots & 1 + \frac{\partial \dot{p}_{s0}}{\partial p_{s0}} \Delta t \end{vmatrix} + O(\Delta t^2) =$$

$$1 + \sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) =$$

$$1 + \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_{i0} \partial q_{i0}} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_{i0} \partial p_{i0}} \right) \Delta t + \sum_i \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_{i0}} + O(\Delta t^2) =$$

$$1 + \sum_i \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_{i0}} + O(\Delta t^2). \tag{691}$$

Тогда, с учетом (685, 686, 691) имеем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Gamma(t + \Delta t)}{\Delta t} = \int_{\Gamma_0} \sum_i \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_{i0}} dq_{10}, \ldots, dq_{s0}, dp_{10}, \ldots, dp_{s0}. \tag{692}$$

Отсюда получаем теорему Лиувилля. Фазовый объем ансамбля механических систем с обобщенно-потенциальными силами и идеальными голономными связями в отсутствии диссипативных сил сохраняется.

58 Уравнение Гамильтона-Якоби. Главная функция Гамильтона.

Для того, чтобы новые координаты и импульсы были постоянными величинами достаточно потребовать, чтобы гамильтониан в новых переменных был тождественно равен нулю. С учетом уравнения (612) (будем использовать производящую функцию второго типа), имеем

$$H' = H(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s, t) + \frac{\partial F_2(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s, t)}{\partial t} = 0. \tag{693}$$

Подставляя в ур. (693) $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ получим дифференциальное уравнение в частных производных, которое содержит $s+1$ $(q_1, \ldots, q_s, t)$ независимую переменную. Полный интеграл этого уравнения (решение содержащее $s+1$ независимых констант) обозначают как S и называют *главной функцией Гамильтона*. Таким образом,

$$H(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) + \frac{\partial S(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, t)}{\partial t} = 0. \tag{694}$$

Уравнение (694) называется уравнением Гамильтона Якоби. Так как в ур. (694) функция S входит только через ее производные, то $S + \mathrm{const}$ также будет решением. То есть одна из $s+1$ констант должна быть аддитивной постоянной, добавляемой к S. Эта константа выпадает из ур. (694) и нас интересовать не будет. В дальнейшем будем использовать полный интеграл $S(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, t)$ содержащий s независимых не аддитивных констант. Формально, решая ур. (694) мы не получаем необходимую нам зависимость от новых импульсов P_i. Однако, сравнивая (693) и (694) видим, что положив

$$\alpha_i \equiv P_i, \tag{695}$$

получаем необходимую нам производящую функцию приводящую к $H' = 0$. Согласно (612)

$$p_i = \frac{\partial S(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{696}$$

Из (696) можно получить константы $\alpha_i = \alpha_i(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s, t)$ как функции координат и импульсов и времени и связать их значения с начальными условиями $q_{10}, \ldots, q_{s0}, p_{10}, \ldots, p_{s0}$ в момент времени t_0. Так как $H' = 0$, то новые координаты будут постоянными величинами, и согласно (612) получаем

$$\frac{\partial S(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, t)}{\partial q_i} = Q_i \equiv \beta_i = \mathrm{const}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{697}$$

Непосредственное вычисление по формуле (697) позволяет найти константы β_i. Разрешая ур. (697) относительно q_i получаем общее решение

$$q_i = q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s, t). \tag{698}$$

Таким образом, решая уравнение Гамильтона-Якоби, мы получаем решение рассматриваемой задачи.

Выбор величин α_i не является однозначным. В качестве констант в полном интеграле уравнения Гамильтона-Якоби можно взять любые s независимых функций

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \tag{699}$$

Уравнение (694) и последующие выводы останутся неизменными с точностью до замены $\alpha_i \to \gamma_i$.

Отметим равенство

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t)}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i + H = L. \tag{700}$$

59 Решение уравнения Гамильтона-Якоби для гармонического осциллятора.

Рассмотрим применение метода Гамильтона-Якоби для гармонического осциллятора с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2. \tag{701}$$

Согласно (694) имеем

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 + \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t} = 0. \tag{702}$$

Так как H не зависит явно от t, сделаем подстановку

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t. \tag{703}$$

Тогда

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = \alpha. \tag{704}$$

Интегрируя (704), имеем

$$W = \sqrt{mk}\int\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}dq \tag{705}$$

и

$$S = \sqrt{mk}\int\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}dq - \alpha t. \tag{706}$$

Согласно (697)

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} - t, \tag{707}$$

или

$$\beta + t = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos q \sqrt{\frac{k}{2\alpha}}. \tag{708}$$

Взяв косинус от левой и правой частей (709), окончательно получаем

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}(t + \beta). \tag{709}$$

С учетом (703) заключаем, что $\alpha = H = E$.

60 Уравнение Гамильтона-Якоби для случая гамильтониана не зависящего явно от времени. Характеристическая функция Гамильтона.

Аналогично примеру, рассмотренному в предыдущем параграфе, в случае когда H не зависит явно от t, можно сделать подстановку

$$S(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, t) = W(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) - \alpha_1 t. \tag{710}$$

Тогда, ур. Гамильтона-Якоби (694) переходит в

$$H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = \alpha_1. \tag{711}$$

Функция W называется характеристической функцией Гамильтона. Полный интеграл ур. (711) содержит $s-1$ не аддитивных независимых констант. Также решение (W) будет зависеть от константы α_1. В результате считаем функцию W зависящей от s констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. С учетом (710), найдя полный интеграл ур. (711), получим главную функцию Гамильтона S.

Можно также в качестве производящей функции F_2 взять не функцию S, а функцию W. Таким образом, положим

$$F_2 \equiv W, \tag{712}$$

$$\alpha_i \equiv P_i. \tag{713}$$

Согласно (612)

$$p_i = \frac{\partial W(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{714}$$

Из (696) можно получить константы $\alpha_i = \alpha_i(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)$ как функции координат и импульсов и связать их значения с начальными условиями $q_{10}, \ldots, q_{s0}, p_{10}, \ldots, p_{s0}$ в момент времени t_0. Так как новый гамильтониан (зависит только от одного нового импульса)

$$H' = \alpha_1, \tag{715}$$

то новые координаты будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \frac{\partial W(q_1,\ldots,q_s,\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}{\partial q_1} = Q_1 = \beta_1 + t, \quad \beta_1 = \text{const} \\ \frac{\partial W(q_1,\ldots,q_s,\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}{\partial q_i} = Q_i = \beta_i = \text{const}, \quad i = 2, \ldots, s. \end{cases} \tag{716}$$

Все координаты кроме первой, которая линейно зависит от времени, будут постоянными величинами. Непосредственное вычисление по формуле (716) позволяет найти константы β_i. Разрешая ур. (716) относительно q_i получаем общее решение

$$q_i = q_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s, t) \tag{717}$$

рассматриваемой задачи. При $i \neq 1$ ур. (716) не содержат времени. Поэтому они позволяют выразить все координаты через какую-либо одну из них, то есть получить уравнение траектории движения. Выбор величин α_i не является однозначным. В качестве констант в полном интеграле уравнения Гамильтона-Якоби можно взять любые s независимых функций

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_s). \tag{718}$$

В этом случае вместо ур. (711) будем иметь

$$H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = H'(\gamma_1, \ldots, \gamma_s). \tag{719}$$

Так как новый гамильтониан, в общем случае, будет зависеть от всех новых импульсов, то новые координаты, в общем случае, будут линейно зависеть от времени

$$\frac{\partial W(q_1, \ldots, q_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_s)}{\partial \gamma_i} = Q_i = \omega_i t + \beta_i, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{720}$$

$$\omega_i = \frac{\partial H'(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)}{\partial \gamma_i}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{721}$$

61 Разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. Пример: движение в поле центральной силы.

В дальнейшем будем рассматривать системы для которых гамильтониан не зависит от времени. При некоторых условиях переменные в ур. (711)

удается разделить решение задачи свести к квадратурам. Под разделением переменных мы подразумеваем, что решение вида

$$W = \sum_i W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) \tag{722}$$

разбивает ур. (711) на s уравнений вида

$$H_i(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \alpha_i. \tag{723}$$

Уравнения (723) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, которые можно свести к квадратурам, если их разрешить относительно $\frac{\partial W_i}{\partial q_i}$.

Рассмотрим случай когда все координаты кроме одной (пусть это будет q_1) являются циклическими. Как известно, в этом случае импульсы $p_i = \alpha_i = const, i = 2, \ldots, s$ являются постоянными. Уравнение (711) переходит в

$$H\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\right) = \alpha_1. \tag{724}$$

Подстановка

$$W = W_1(q_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) + \sum_{i=2}^{s} q_i, \alpha_i, \tag{725}$$

где $W_i = q_i\alpha_i, \quad i = 2, \ldots, s$, приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} H\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\right) = \alpha_1 \\ \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \alpha_i, \quad i = 2, \ldots, s. \end{cases} \tag{726}$$

Все уравнения кроме первого удовлетворяются тождественно и означают, что $p_i = P_i = \alpha_i = \text{const}, \ i = 2, \ldots, s$, то есть для всех импульсов начиная со второго старые импульсы равняются новым. В методе Гамильтона-Якоби новые импульсы являются постоянными. Так как старые импульсы (для $i = 2, \ldots, s$) являются постоянными, то их можно принять равными новым (оставить без преобразования). См. стр. 315 в [Г. Голдстейн, Классическая механика, Физматгиз, 1975] для решения задачи о движении в поле центральной силы.

Не трудно видеть, что разделение переменных также возможно если зависимость гамильтониана от координат и импульсов имеет вид

$$H\left(f_1(q_1, p_1), \ldots, f_s(q_s, p_s)\right) \tag{727}$$

или

$$H\left(f_1(q_1, p_1, f_2(q_2, p_2, \ldots, f_s(q_s, p_s) \ldots))\right). \tag{728}$$

62 Периодические движения типа колебания и вращения. Фазовые траектории. Цикл периодического движения. Примеры: гармонический осциллятор, плоский маятник. Переменные действие - угол. Многопериодические движения.

Рассмотрим сперва периодическое движение одномерной системы. Различают два случая периодического движения. При периодическом движении первого типа, называемом *либрацией*, координата и импульс являются периодическими функциями времени с одинаковым периодом T

$$p(t+T) = p(t), \tag{729}$$

$$q(t+T) = q(t). \tag{730}$$

В этом случае траектория в фазовом пространстве есть замкнутая кривая. При периодическом движении второго типа, называемом *вращением*, координата не является периодической функцией времени, а неограниченно возрастает. При этом p будет периодической функцией q с периодом q_0

$$p(q+q_0) = p(q), \tag{731}$$

и при изменении координаты на q_0 конфигурация системы, по сути, не меняется. Траекторией в фазовом пространстве будет незамкнутая кривая. Простым примером периодического движения второго типа является вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. В качестве координаты выступает угол поворота.

Оба типа периодического движения могут встречаться могут встречаться в одной и той же системе. Рассмотрим например математический маятник. Из закона сохранения энергии

$$E = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi, \tag{732}$$

где m, l есть масса и длина маятника, φ – угол отклонения, получаем уравнение траектории в фазовом пространстве

$$p_\varphi = \sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\varphi)}. \tag{733}$$

Если $E < mgl$, то возможны только значения $|\varphi| < \varphi'$, где $\varphi' = \arccos - \frac{E}{mgl}$. Маятник будет совершать периодические движения первого типа. Если $E > mgl$, то возможны все значения φ, и маятник будет совершать периодические движения второго типа. Кривая $E = mgl$ разделяет области фазового пространства в которых лежат траектории первого и второго типов периодического движения. Соответствующие траектории можно увидеть на рис. 64 в [Г. Голдстейн, Классическая механика, Физматгиз, 1975].

В случае системы с s степенями свободы будем называть движение *почти-периодическим* если проекция траектории на каждую из плоскостей (q_i, p_i) будет периодическим в указанном выше смысле. Термин "почти-"указывает на то, что периоды для различных пар (q_i, p_i) могут быть несоизмеримы (относится как иррациональные числа). Поэтому суммарное движение необязательно будет периодическим.

Используя метод Гамильтона-Якоби можно найти периоды почти-периодического движения, не интересуясь законом движения системы. Ограничимся рассмотрением систем в которых переменные в уравнении Гамильтона-Якоби разделяются и характеристическая функция имеет вид (749). Уравнение

$$p_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \frac{\partial W(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)}{\partial q_i} = \frac{dW_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)}{dq_i} \tag{734}$$

дают проекцию траектории на плоскость (q_i, p_i), которая, по условию, удовлетворяет условию периодического движения первого или второго типа. Введем переменные действия (ср. 718)

$$I_i = I_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) dq_i, \tag{735}$$

где интеграл берется за полный период изменения q_i. Если для переменных q_i, p_i реализуется первый тип периодического движения, то интеграл равняется площади фигуры ограниченной проекцией фазовой траектории на плоскость (q_i, p_i). Если реализуется второй тип, то интеграл равняется площади фигуры ограниченной кривой $p_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ и осью q_i в интервале периода функции. Возьмем в качестве новых импульсов переменные действия, тогда характеристическая функция будет иметь вид

$$W = \sum_i W_i(q_i, I_1, \ldots, I_s). \tag{736}$$

Координаты соответствующие переменным действия

$$\varphi_i = \frac{\partial W(q_1, \ldots, q_s, I_1, \ldots, I_s)}{\partial I_i}, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{737}$$

называются угловыми переменными. Они (ср. 720) будут линейно зависеть от времени

$$\varphi_i = \omega_i t + \beta_i, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{738}$$

где

$$\omega_i = \frac{\partial H'(I_1, \ldots, I_s)}{\partial I_i}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{739}$$

Покажем, что ω_i будут равняться частотам почти-периодического движения. Действительно, рассмотрим изменение φ_i за полный период изменения q_j при постоянных других координатах

$$\Delta\varphi_i = \oint \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} dq_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial q_j} dq_j =$$

$$\frac{\partial}{\partial I_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint p_j dq_j = 2\pi \frac{\partial I_j}{\partial I_i} = 2\pi \delta_{ij}. \tag{740}$$

С другой стороны, если движение почти-периодическое (Еще раз подчеркнем, что это наше условие. В общем случае систем с несколькими степенями свободы, даже в случае разделения переменных, финитное движение не является периодическим даже по одной координате), то полный период изменения q_i происходит за время равное периоду T_i. Тогда, из (738, 740) следует

$$\omega_i T_i = 2\pi, \tag{741}$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим в качестве примера гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2. \tag{742}$$

В силу закона сохранения энергии уравнение траектории в фазовом пространстве есть уравнение эллипса

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/k} \tag{743}$$

с полуосями $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{2E/k}$. Отсюда для переменной действия имеем

$$I = \frac{1}{2\pi}\pi\sqrt{2mE}\sqrt{2E/k} = E\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{744}$$

Отсюда

$$H = I\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{745}$$

и

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial I} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{746}$$

При финитном движении, если декартовы координаты МТ системы не стремятся к определенному пределу (движение не является лимитационным) угловые переменные (737) являются неоднозначными функциями состояния системы. Это видно, например, из ур. (738), которое показывает, что угловые переменные стремятся к плюс или минус бесконечности, в то время как координаты (и импульсы) не стремятся ни к конечному ни к бесконечному пределу. Ур. (740) показывает, что одному и тому же состоянию могут соответствовать угловые переменные отличающиеся на цело число 2π. Отсюда следует, что всякая однозначная функция состояния системы $F(q,p)$ выраженная через угловые переменные и действия (однозначные функции состояния системы) должна содержать зависимость от угловых переменных через их косинусы и синусы. Или, иными словами, однозначная функция состояния системы должна разлагаться в ряд Фурье

$$F(q,p) = \sum_{n_1,\ldots,n_s=-\infty}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_s}(I_1,\ldots,I_s)e^{n_1\varphi_1+\cdots+n_s\varphi_s}. \tag{747}$$

63 Адиабатическая инвариантность переменных действия.

Важным свойством переменных действия является их адиабатическая инвариантность. Оказывается, что при достаточно медленном (изменения малы за время периодов T_i) изменении параметров системы переменные действия с высокой точностью сохраняют постоянные значения. Для доказательства учтем в уравнении Гамильтона-Якоби

$$H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{dW_1(q_1, \alpha, \lambda)}{dq_1}, \ldots, \frac{dW_s(q_s, \alpha, \lambda)}{dq_s}, \lambda\right) = H(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \lambda), \quad (748)$$

характеристической функции

$$W = \sum_i W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \lambda) \quad (749)$$

и переменных действия

$$I_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \lambda) dq_i \quad (750)$$

явную зависимость от параметра λ. В качестве параметра могут выступать жесткость пружин, длины нитей и др.

Будем теперь считать параметр $\lambda \to \lambda(t)$ слабо зависящим от времени. При этом, вообще говоря, проекции траекторий на плоскости (q_i, p_i) будут не замкнутыми кривыми и может показаться, что определение (750) является не корректным. Однако, еще раз подчеркнем, что при интегрировании в (750) речь идет не о реальном (при движении) изменении координаты, а об ее формальном изменении во всем допустимом интервале в фиксированный момент времени t. Функцию $H(\alpha, \lambda)$ в ур. (748) и W в ур. (749) с помощью (750) можно переписать через переменные действия

$$H(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \lambda) = H(\alpha_1(I, \lambda), \ldots, \alpha_s(I, \lambda), \lambda) = H(I_1, \ldots, I_s, \lambda), \quad (751)$$

$$W(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \lambda) = W(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1(I, \lambda), \ldots, \alpha_s(I, \lambda), \lambda) = \quad (752)$$

$$W(q_1, \ldots, q_s, I_1, \ldots, I_s, \lambda). \quad (753)$$

Переменные действия (750) являются новыми импульсами. Для определения уравнения их движения необходимо получить новый гамильтониан. Однако надо теперь учитывать, что производящая функция (753) явно зависит от времени (через параметр λ). Тогда, в соответствии с (612), для нового гамильтониана имеем

$$H' = H(I, \lambda) + \frac{\partial W}{\partial t} = H(I, \lambda) + \frac{\partial W(q, I, \lambda)}{\partial \lambda} \dot{\lambda}. \quad (754)$$

Теперь можно написать закон движения

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \varphi_i} = -\frac{\partial^2 W(q(\varphi, I, \lambda), I, \lambda)}{\partial \varphi_i \partial \lambda} \dot{\lambda} \quad (755)$$

В ур. (755) подразумевается следующая последовательность дифференцирования. Сначала W как функция (q, I, λ), в соответствии с (754), дифференцируется по λ, затем координаты q_i заменяются их функциями $q_i(\varphi, I, \lambda)$ (так как гамильтониан должен зависеть от новых координат и импульсов), и наконец полученная функция дифференцируется по φ_i.

За полный период изменения q_j при постоянных других координатах функция W имеет приращение

$$\Delta W = \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \oint p_j dq_j = 2\pi I_j, \tag{756}$$

поэтому W является неоднозначной функцией состояния системы. Однако при дифференцировании по λ добавка $2\pi I_j$ исчезает и производная в ур. (754) является однозначной функцией состояния системы и может быть разложена в ряд Фурье (747). При дифференцировании по φ_i слагаемое в ряде Фурье с $n_1 = n_2 = \cdots = n_s = 0$ зануляется. В результате из ур. (738, 747, 755) получаем

$$\dot{I}_i = \dot{\lambda} \sum_{n_1,\ldots,n_s}{}' B_{n_1,\ldots,n_s}(I_1, \ldots, I_s) e^{(n_1\omega_1 + \cdots + n_s\omega_s)t}, \tag{757}$$

где штрих у суммы означает, что слагаемое с $n_1 = n_2 = \cdots = n_s = 0$ отсутствует. Усредним ур. (757) по промежутку времени $T >> T_i$ много большему (в пределе бесконечному) периодов почти-периодического движения

$$\bar{\dot{I}}_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\lambda} \sum_{n_1,\ldots,n_s}{}' B_{n_1,\ldots,n_s}(I_1, \ldots, I_s) e^{(n_1\omega_1 + \cdots + n_s\omega_s)t} dt = \tag{758}$$

$$\dot{\lambda} \sum_{n_1,\ldots,n_s}{}' B_{n_1,\ldots,n_s}(I_1, \ldots, I_s) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{(n_1\omega_1 + \cdots + n_s\omega_s)t} dt = 0. \tag{759}$$

При выводе (759) мы вынесли медленно меняющиеся множители из подинтегрального выражения, а также считаем, что закон движения (738) приближенно выполняется.

Рассмотрим в качестве примера адиабатическое изменение длины математического маятника с гамильтонианом

$$H = \frac{m}{2} l(t)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{mgl(t)}{2} \varphi^2 = \frac{p^2}{2ml(t)^2} + \frac{mgl(t)}{2} \varphi^2. \tag{760}$$

При фиксированном t уравнение траектории в фазовом пространстве есть уравнение эллипса

$$1 = \frac{p^2}{2ml(t)^2 H} + \frac{q^2}{2H/mgl(t)} \tag{761}$$

с полуосями $\sqrt{2ml(t)^2H}$ и $\sqrt{2H/mgl(t)}$. Отсюда для переменной действия (адиабатического инварианта) получаем

$$I = \frac{1}{2\pi}\pi\sqrt{2ml(t)^2H}\sqrt{2H/mgl(t)} = H\sqrt{\frac{l(t)}{g}}. \tag{762}$$

или

$$H(t) = I\sqrt{\frac{g}{l(t)}}. \tag{763}$$

Уравнение (763) дает зависимость гамильтониана от времени. Адиабатический инвариант I считаем независящим от времени. В соответствии с общей теорией, изложенной в данном параграфе, H в уравнении (763) усреднен по некоторому интервалу времени. Считая, что закон движения для угла отклонения маятника есть

$$\varphi = \varphi_0(t)cos(\omega(t)t), \tag{764}$$

где $\omega(t) = \sqrt{\frac{g}{l(t)}}$, $\varphi_0(t)$ есть слабо-зависящая от времени амплитуда колебания, явно усредняя (760) по времени, получаем

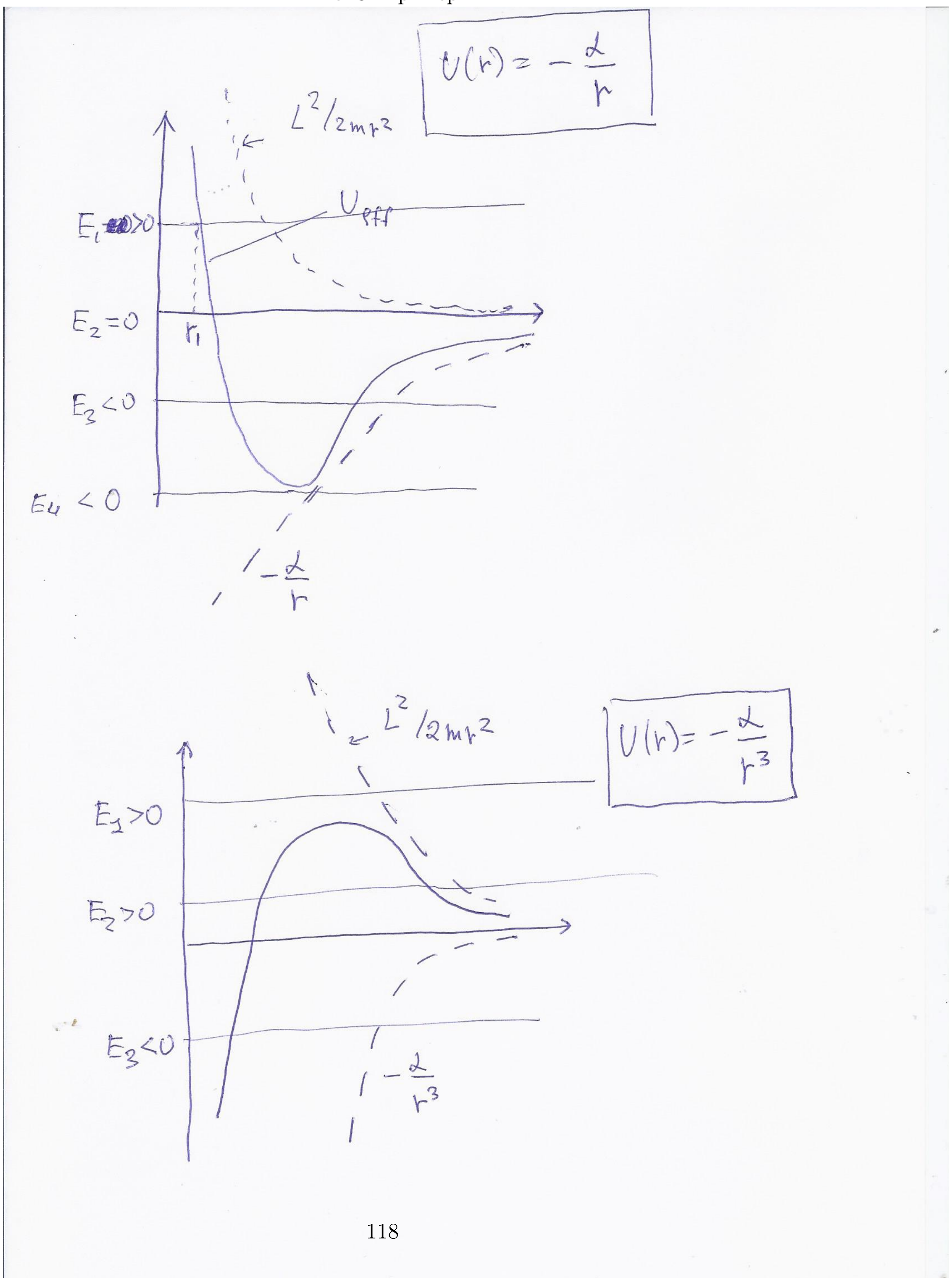
$$H(t) = \frac{mg}{2}l(t)\varphi_0(t)^2. \tag{765}$$

Теперь, сравнивая (763) и (765), получаем, что

$$l(t)^{3/4}\varphi_0(t) = const, \tag{766}$$

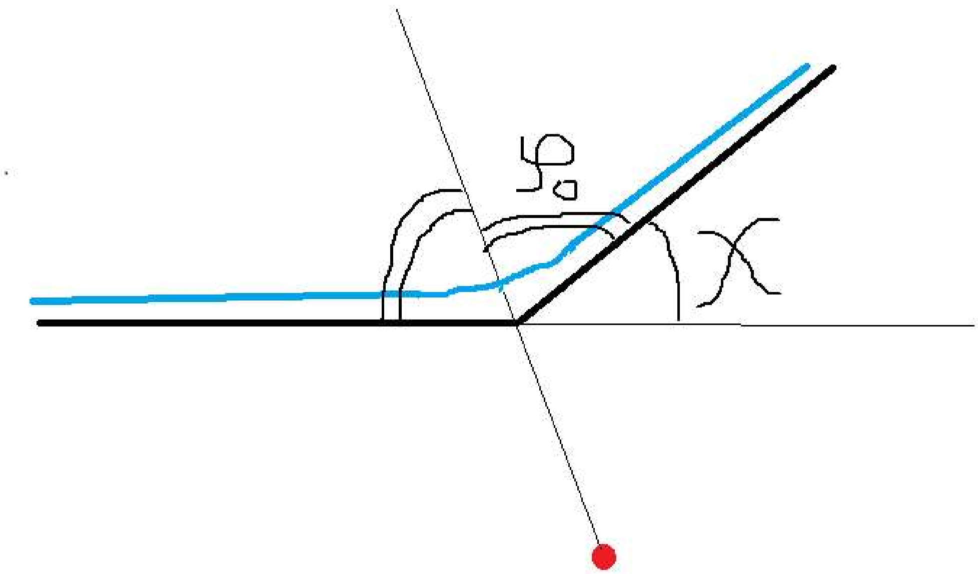
что дает закон изменения амплитуды колебания при заданной медленно меняющейся длине математического маятника $l(t)$.

Рис. 3: Пример



$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$
$L^2/2mr^2$
U_{eff}
$E_1>0$
$E_2=0$
r_1
$E_3<0$
$E_4<0$
$-\frac{\alpha}{r}$
$L^2/2mr^2$
$U(r) = -\frac{\alpha}{r^3}$
$E_1>0$
$E_2>0$
$E_3<0$
$-\frac{\alpha}{r^3}$

Рис. 4: Угол рассеяния



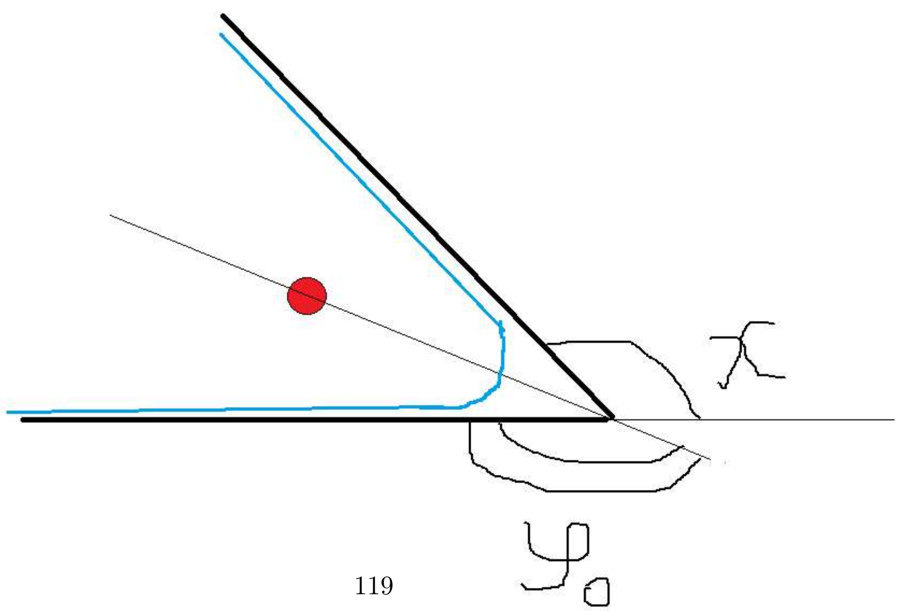


Рис. 5: Прицельное расстояние

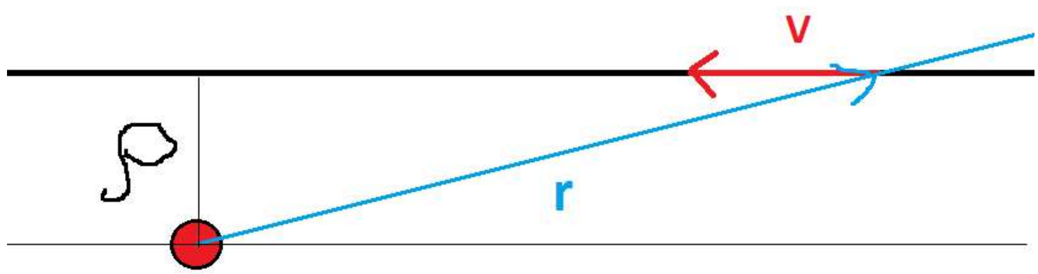


Рис. 6: Сечение рассеяния

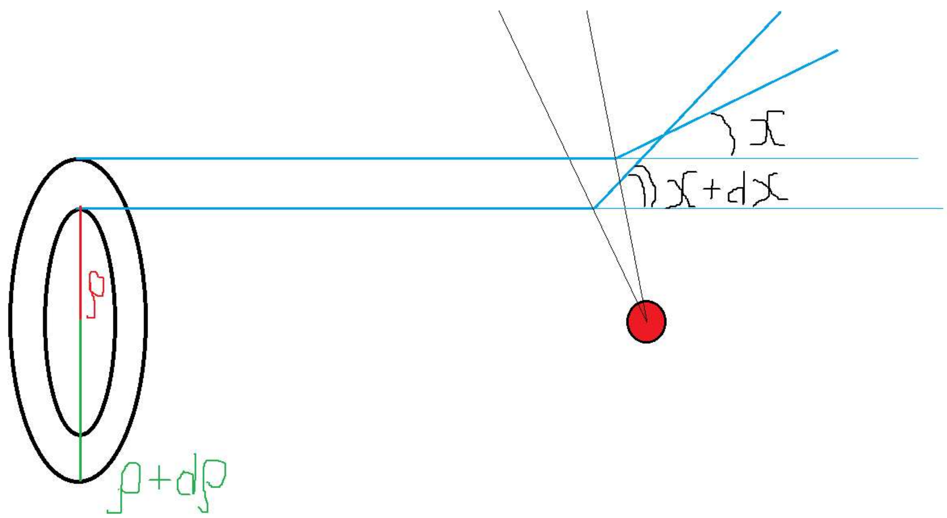


Рис. 7: Упругое рассеяние

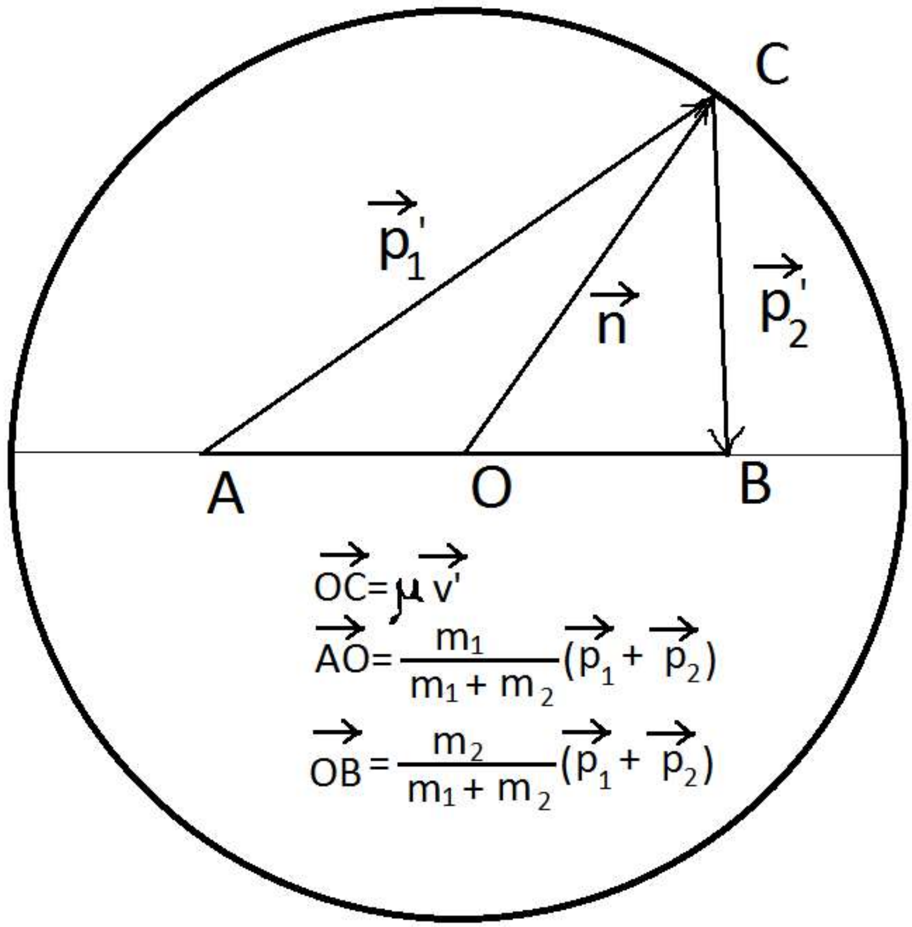


Рис. 8: Упругое рассеяние $\mathbf{v}_2 = 0$

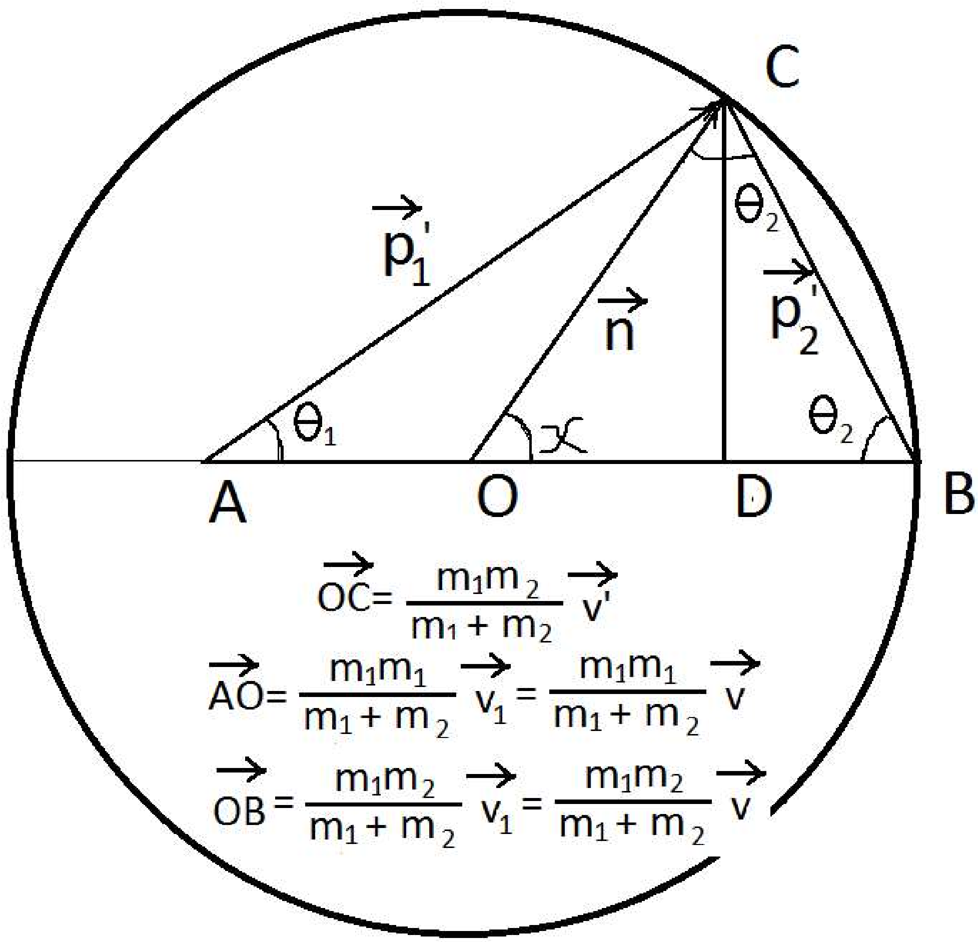


Рис. 9: Подвижная система отсчета

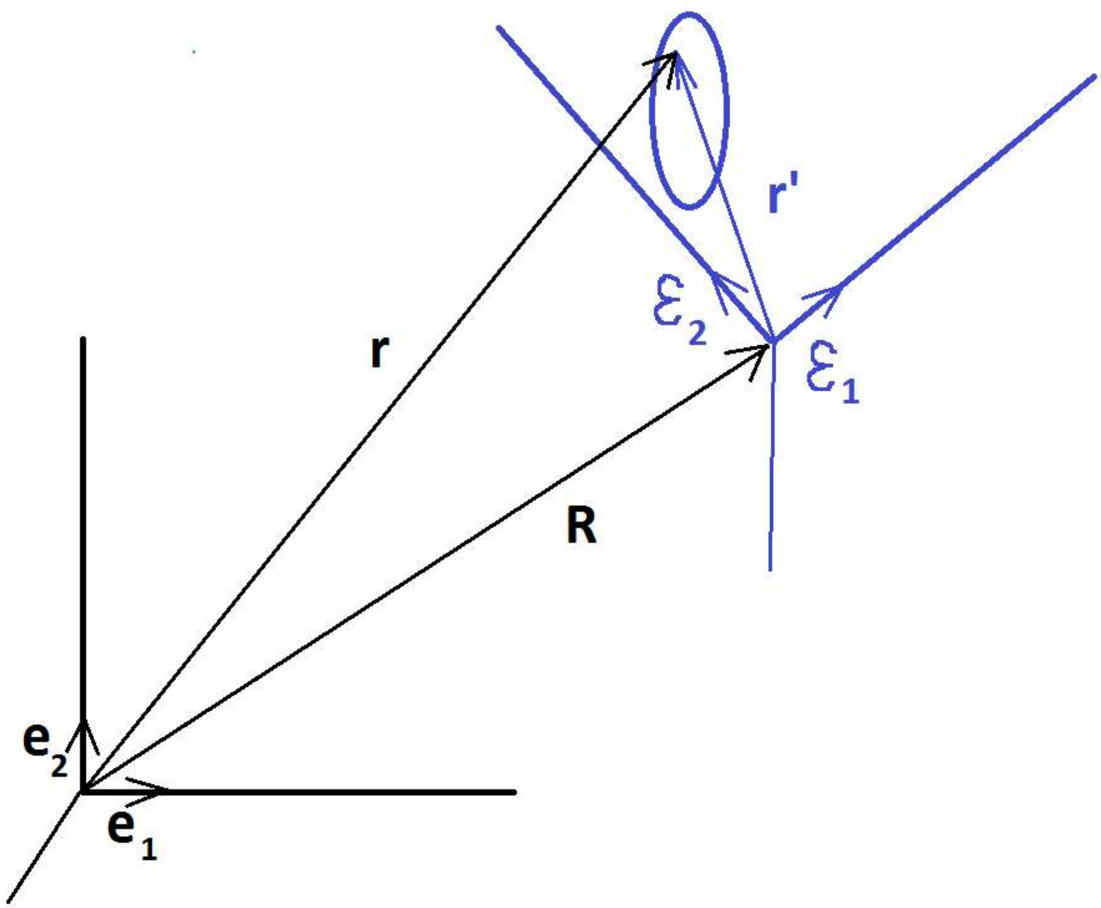


Рис. 10: Подвижная система отсчета

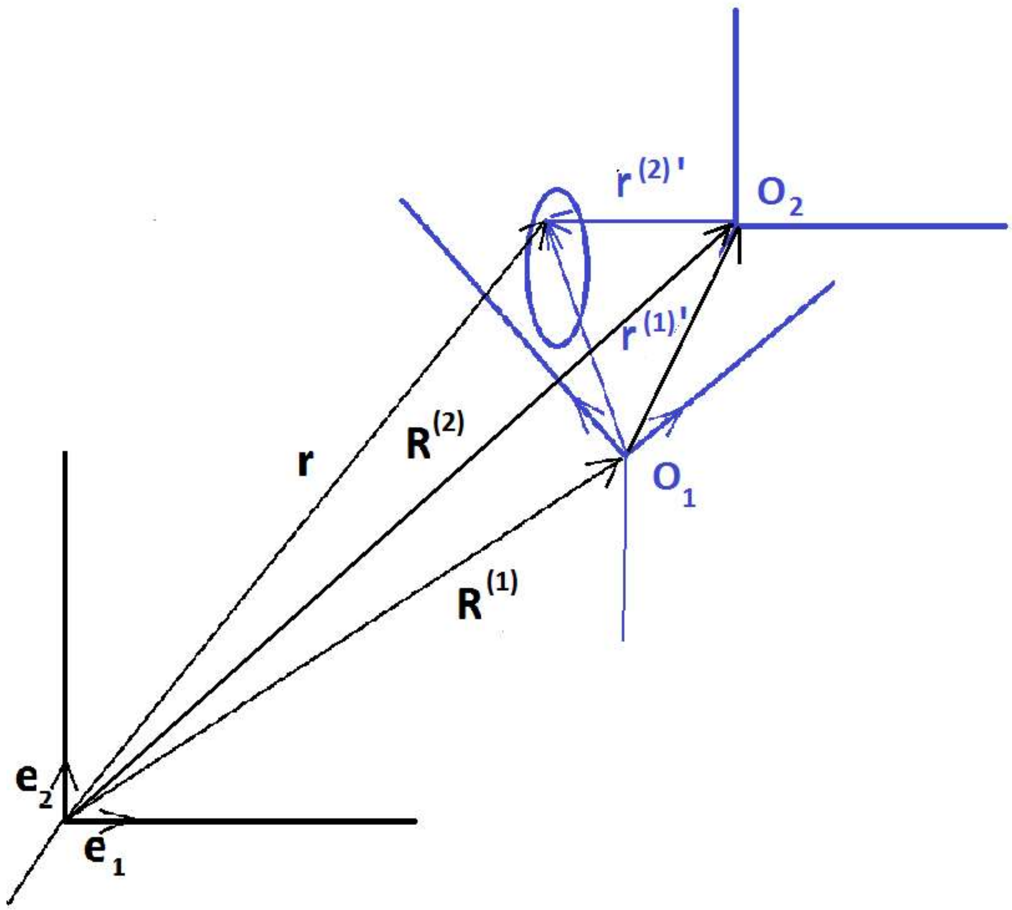


Рис. 11: Момент инерции

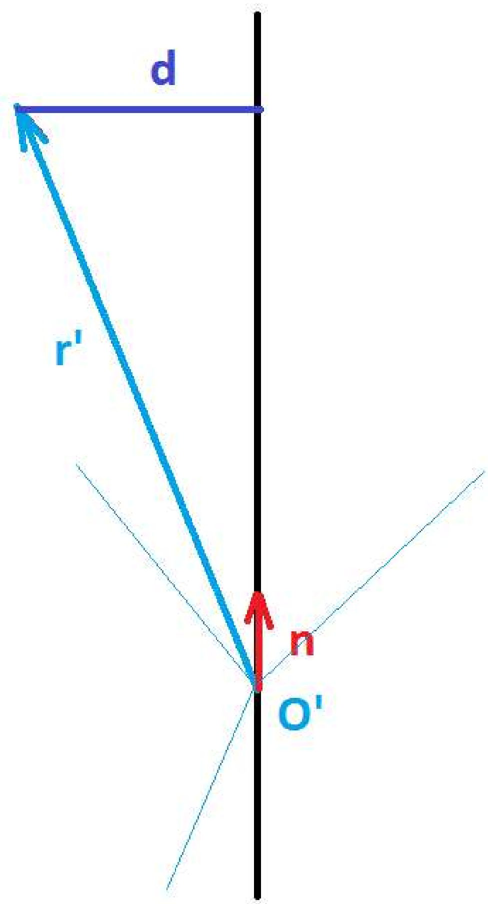


Рис. 12: Теорема Штейнера

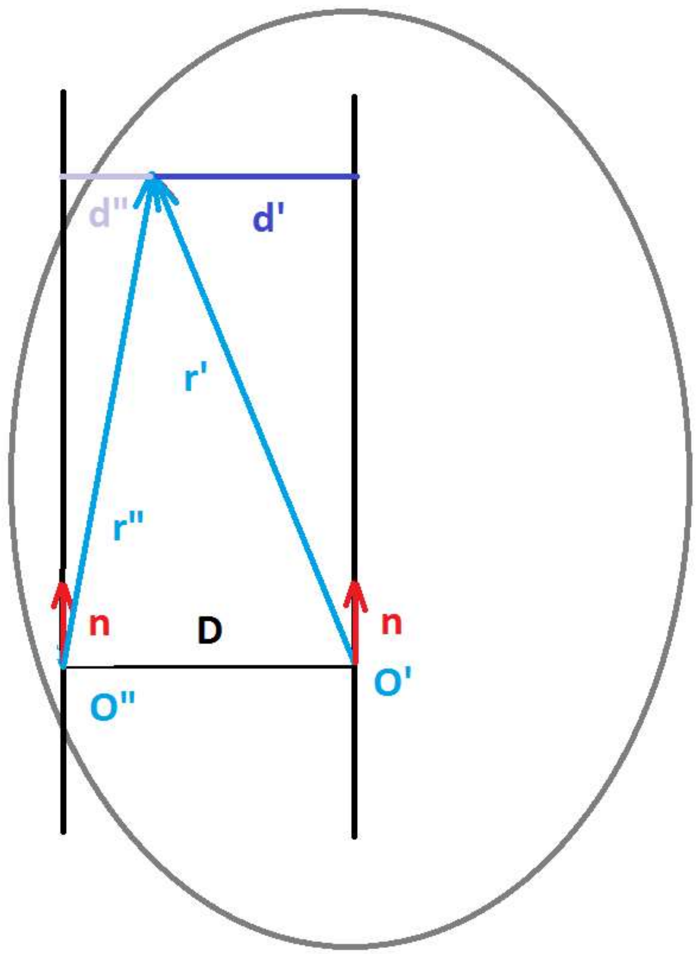


Рис. 13: Прецессия симметричного волчка. Подвижная система отсчета.

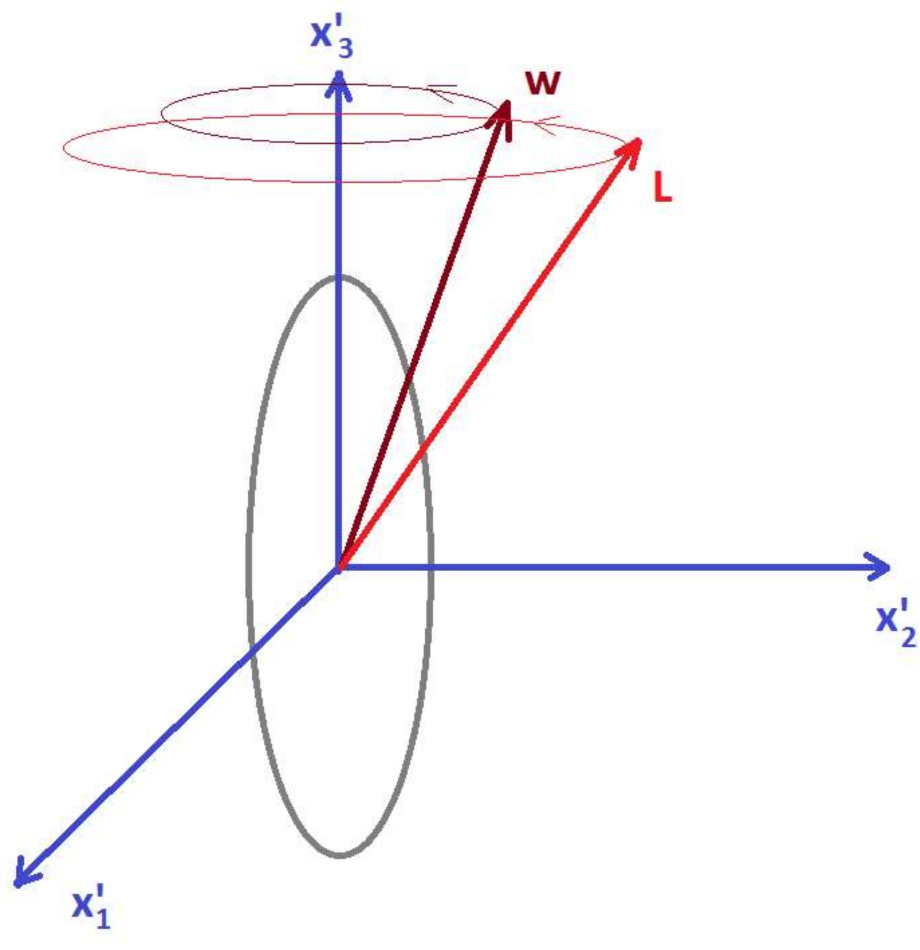


Рис. 14: Прецессия симметричного волчка. Лабораторная система отсчета.