

Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет

А. И. Соколов

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2012

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Физического учебно-научного центра СПбГУ*

Рекомендовано к изданию Ученым советом физического факультета СПбГУ

Рецензенты:

Проф. И.И. Тупицын (СПбГУ), проф. А.Е. Кучма (СПбГУ)

Соколов А.И.

Элементы квантовой информатики: Учебное пособие. – СПб.: Издательство физического факультета СПбГУ, 2012. – 66 с.

Учебное пособие содержит изложение основ квантовой информатики, новой науки, возникшей на стыке квантовой механики и теории информации и быстро развивающейся в последние годы. Основано на материале лекций, читаемых автором в рамках курсов «Современные проблемы физики» и «Элементы квантовой информатики».

Предназначено для студентов-магистрантов. Может быть полезным студентам, аспирантам и научным работникам, начинающим знакомиться с квантовой информатикой и смежными областями знаний.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение.....	4
2. Спиноры.....	5
3. Спиновые операторы.....	7
4. Спины и кубиты.....	8
5. Квантовый компьютер, или как заставить кубиты работать.....	11
6. Сколько бит в кубите.....	13
7. Операции с кубитом.....	16
8. Элемент сдвига фазы и полная однокубитовая логика.....	19
9. Двухкубитовые операции.....	20
10. Квантовый логический элемент CNOT.....	21
11. Можно ли копировать кубит.....	24
12. Квантовые схемы.....	26
13. Состояния Белла.....	28
14. Физическая реализация кубитов и однокубитовых операций.....	30
14.1. Свободный спин.....	30
14.2. Спин в магнитном поле.....	35
14.3. Ридберговский атом в резонаторе.....	38
15. Перепутанные состояния.....	42
16. Перепутанность как информационный ресурс.....	45
17. Квантовая телепортация.....	48
17.1. Телепортация классических битов.....	49
17.2. Телепортация произвольного квантового состояния.....	51
18. Заключение.....	58
19. Задачи.....	59
20. Контрольные вопросы.....	62
21. Список литературы.....	64

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, почти все современные системы хранения, обработки и передачи информации представляют собой цифровые устройства, работающие с дискретными во времени (импульсными) сигналами. Амплитуда импульсов, циркулирующих в цифровых системах, также пробегает дискретный набор значений. Говорят, что сигнал здесь квантован (хотя к квантовой механике это квантование не имеет никакого отношения). Обычно используется простейшее квантование амплитуды – бинарное, когда амплитуда принимает либо фиксированное конечное значение, либо равна нулю. С помощью одного такого бинарно квантованного импульсного сигнала можно передать минимально возможное количество информации – один бит, т. е. сообщить, какое из двух априори равновероятных событий реально произошло.

В современных компьютерах общего назначения тактовая частота процессора составляет $2 \div 4$ ГГц. Это значит, что единичные импульсы в этих очень популярных сегодня устройствах обработки информации имеют длительность τ порядка 10^{-10} с. Характерные значения тока I в импульсе составляют примерно 10^{-3} А. Ток, в свою очередь, есть направленное движение элементарных носителей заряда – электронов. Поинтересуемся, сколько электронов, по порядку величины, необходимо, чтобы записать или передать один бит информации. Это количество дается очевидной формулой $N = \tau I / e$, где $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона. Подставляя сюда приведенные выше оценки для τ и I , получим $N \sim 10^6$.

Обратимся к другому примеру. Рассмотрим ячейку памяти в виде очень маленького конденсатора. Чтобы записать в этой ячейке единицу информации, надо зарядить конденсатор до напряжения $V \sim 1$ В. Приняв для емкости конденсатора оценку $C \sim 0.1$ пФ, найдем, что требуемую разность потенциалов можно получить, переместив с обкладки на обкладку заряд $Q = CV \sim 10^{-13}$ Кл. Таким суммарным зарядом обладают $Q/e \sim 10^6$ электронов.

Миллион электронов – это много или мало? Если вспомнить, что электрон есть самая маленькая по массе из всех известных элементарных частиц (с ненулевой массой покоя), то, конечно, это не так уж много, особенно с учетом того, что микросхема – макроскопический прибор, работающий при комнатной температуре. Однако если учесть, что каждый отдельный электрон обладает собственными информационными ресурсами, достаточными

для переноса как минимум того же объема информации (1 бит), то станет ясно, что организация передачи данных в современных электронных системах с точки зрения фундаментальной физики очень далека от оптимальной.

Действительно, электрон, как и многие другие частицы, обладает зарядом и спином. Поместив электрон, скажем, на один из электродов конденсатора, мы изменим электрический потенциал этого электрода по отношению к другому и тем самым переведем конденсатор из одного состояния (незаряженного) в другое (заряженное). Этот очень простой, в принципе, процесс позволяет реализовать передачу и запоминание одного бита информации. Достаточно лишь договориться, что незаряженному конденсатору соответствует двоичный нуль, а заряженному – двоичная единица. Кроме того, конечно (и это самое главное!), надо научиться делать конденсаторы с фантастически малой емкостью, заряжать их отдельными электронами и измерять возникающую при этом разность потенциалов, не разряжая сам конденсатор. Решением этих и многих других очень интересных и важных проблем успешно занимается сегодня наука, которую называют одноэлектроникой.

Двоичные нуль и единицу можно кодировать также в виде ориентации электронного спина. Поскольку проекция спина на произвольную ось s_z может принимать только два значения: $\hbar/2$ и $-\hbar/2$, их естественно отождествить с нулем и единицей. Записи информации в этом случае соответствует приготовление состояния с определенным значением s_z , ее передаче – транспортировка электрона в идеальных с точки зрения квантовой механики условиях (отсутствие рассеяния с переворотом спина), а считыванию информации – измерение s_z на приемном конце. Более того, информацию, записанную в виде состояния одного или нескольких электронных спинов, можно преобразовывать (обрабатывать), помещая квантовую систему, скажем, во внешние постоянные и переменные поля. Изучением обширного круга возникающих здесь вопросов и возможностей практического применения множества новых физических эффектов занимаются спинтроника и, с более общих позиций, квантовая информатика.

2. СПИНОРЫ

Перед тем, как обратиться непосредственно к квантовой информатике, вспомним основы квантовой механики спина. Как известно, спином назы-

валяется фундаментальное свойство частицы, состоящее в наличии у нее собственного механического (вращательного) и магнитного моментов. Эти моменты квантованы, т. е. их проекции на любое направление принимают дискретные значения. Для механического момента соседние значения проекции s_z отстоят друг от друга на величину \hbar . В отличие от орбитального момента проекции спина могут принимать значения не только кратные постоянной Планка, но и полуцелые в единицах \hbar : $\pm \hbar/2$, $\pm 3\hbar/2$ и т. д. Частицы, у которых проекции спина равны целому числу \hbar , называются бозонами, а частицы с полуцелым спином – фермионами. К фермионам принадлежат, например, электрон, протон и нейтрон, имеющие спин $1/2$, к бозонам – фотон, чей спин равен единице.

Для описания состояния спина и динамики спиновых переменных, в роли которых обычно выступают декартовские проекции s_x , s_y , s_z , вводятся особые волновые функции, которые называют спинорами. В случае электрона спинор имеет следующий вид:

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(r, t) \\ \psi_{\downarrow}(r, t) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Физический смысл компонент спинора состоит в том, что $|\psi_{\uparrow}(r, t)|^2$ дает плотность вероятности координат электрона при условии, что проекция его спина $s_z = \hbar/2$, а $|\psi_{\downarrow}(r, t)|^2$ – распределение вероятности координат при $s_z = -\hbar/2$. Как и обычная волновая функция, спинор подчиняется условию нормировки:

$$\int (|\psi_{\uparrow}(r, t)|^2 + |\psi_{\downarrow}(r, t)|^2) dr = 1. \quad (2.2)$$

Вводя для спиноров операцию сопряжения по Эрмиту, которая на матричном языке сводится к транспонированию и комплексному сопряжению, можно записать последнее соотношение в виде

$$\int \chi^+ \chi dr = 1. \quad (2.3)$$

По своему виду спинор напоминает двумерный вектор с комплексными компонентами, однако это сходство – внешнее. На самом деле вектора и спиноры являются разными математическими объектами, ибо обладают разными

трансформационными свойствами. Это значит, что при поворотах системы координат их компоненты преобразуются по различным законам.

3. СПИНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В квантовой механике физическим величинам или, как их еще называют, «наблюдаемым» отвечают линейные операторы. Как выглядят эти операторы в случае спиновых переменных? Поскольку для любой частицы модуль вектора спина фиксирован, переменными являются лишь проекции этого вектора. Спиноры частиц со спином $\frac{1}{2}$ являются двухкомпонентными объектами. Следовательно, операторы проекций спина, преобразующие один спинор в другой, должны в этом случае иметь вид матриц 2×2 . Структуру оператора \hat{s}_z нетрудно установить, если учесть, что спиноры

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

которые описывают состояния спина с определенными значениями проекции s_z , должны быть его собственными функциями, отвечающими собственным числам $\hbar/2$ и $-\hbar/2$. Решая совместно уравнения

$$\hat{s}_z \chi_{\uparrow} = \frac{\hbar}{2} \chi_{\uparrow}, \quad \hat{s}_z \chi_{\downarrow} = -\frac{\hbar}{2} \chi_{\downarrow}, \quad (3.2)$$

легко получить:

$$\hat{s}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Выражения для операторов двух других проекций спина имеют вид:

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Фигурирующие в (3.3), (3.4) матрицы

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

называются матрицами Паули. Они обладают целым рядом замечательных свойств. Например, вместе с единичной матрицей

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

они образуют базис в пространстве эрмитовых матриц, т. е. любая эрмитова матрица 2×2 может быть представлена в виде линейной комбинации σ_x , σ_y , σ_z и I с вещественными коэффициентами.

4. СПИНЫ И КУБИТЫ

Теперь пришло время вспомнить, что мы рассматриваем спин электрона как средство хранения и переноса информации. Если бы проекция собственного момента частицы была классической переменной, принимающей только два значения (такие переменные называют дихотомическими), то с помощью одного спина можно было бы сохранить или передать лишь один бит информации. Однако реальный – квантовый – спин, в отличие от своего классического аналога, может находиться не только в состояниях с определенными значениями проекции s_z . Согласно принципу суперпозиции состояний, существует множество других состояний, в которых при измерении проекции спина с ненулевыми вероятностями будут получаться оба возможных значения s_z : $\hbar/2$ и $-\hbar/2$. Волновые функции таких состояний можно записать в виде:

$$\chi = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

или, с учетом (3.1),

$$\chi = \alpha \chi_{\uparrow} + \beta \chi_{\downarrow}. \quad (4.2)$$

Здесь α и β – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (4.3)$$

которое обеспечивает нормировку спинора (4.1), (4.2).

Итак, электронный спин может пребывать в одном из огромного числа различных квантовых состояний. Поскольку коэффициенты α и β пробегает

бесконечный набор значений, ограниченный лишь условием (4.3), число таких состояний бесконечно велико; они, как говорят в таких случаях, образуют континуальное множество или просто континуум. Это значит, что если бы у нас были устройства, генерирующие электроны в спиновых состояниях (4.1), и приборы, позволяющие измерять соответствующие волновые функции, то мы могли бы хранить и передавать неограниченный объем информации, используя одну-единственную частицу.

Эта перспектива выглядит столь заманчиво, что сразу возникает вопрос – реальна ли она? Ответ на этот вопрос непрост. В каком-то смысле он даже неоднозначен.

Итак, пусть у нас есть спин в квантовом состоянии (4.1). Все, что мы можем сделать, чтобы узнать (экспериментально восстановить) состояние спина – это измерить его проекцию s_z . Набор возможных результатов измерения известен: прибор выдаст $\hbar/2$ или $-\hbar/2$. Получив определенное значение s_z , мы, однако, ничего не сможем сказать о вероятности реализации такого события в исходном состоянии (4.1). Но именно эта вероятность нас и интересует, поскольку она выражается через коэффициент α , чье значение есть по сути записанная в (4.1) информация, которую мы хотели бы прочитать.

Как поступить дальше? Понятно, что определить α или, точнее, $|\alpha|^2$ можно, лишь набрав соответствующую статистику. Для этого надо провести достаточно большое число измерений. Однако над одной и той же частицей проводить их бессмысленно. Дело в том, что уже первое измерение изменит ее состояние, превратив его из суперпозиции (4.1) в одно из состояний (3.1) с определенным значением s_z . Эта ситуация очень характерна для физики микромира, где воздействие измерительного прибора на исследуемую систему нельзя сделать сколь угодно слабым и где взаимодействие системы с прибором приводит к изменению ее квантового состояния. (Мы оставляем здесь в стороне вопрос о так называемых неразрушающих измерениях, в практической реализации которых недавно был достигнут большой прогресс.) Таким образом, работая с одной частицей, прочитать всю информацию, хранимую спинором (4.1), нельзя.

Это положение не следует считать совсем безвыходным. В принципе, величину $|\alpha|^2$ определить в эксперименте можно, но для этого придется обратиться к ансамблю одинаковых частиц, находящихся в одном и том же квантовом состоянии (4.1). Проведя измерения s_z для каждой из них, мы найдем

вероятность появления значения $\hbar/2$, т. е. $|\alpha|^2$, причем определим эту вероятность тем точнее, чем больше частиц в ансамбле. Информация, содержащаяся в спиноре (4.1), будет прочитана, но сказать, что ее носителем является одна частица, уже нельзя.

Мы пришли к очень странному результату. С одной стороны, существуют квантовые состояния спинов отдельных частиц, которые несут в себе огромные объемы информации. Это видно хотя бы из того, что для задания волновых функций таких состояний требуется фиксировать коэффициенты α и β , которые в общем случае иррациональны, т. е. содержат бесконечное число десятичных разрядов. С другой стороны, эту информацию невозможно прочитать, работая с одной частицей. Возникает естественный вопрос: а является ли такая, записанная на одной частице и закрытая для считывания информация «настоящей»? Другими словами, можно ли считать информацией то, что реально существует, но полностью недоступно в эксперименте.

Чтобы прояснить положение дел, задумаемся, на каком этапе пропадает для наблюдателя та гигантская информация, которую содержит спинор (4.1). Она исчезает в момент измерения, когда исходная суперпозиция превращается (как говорят, редуцируется) в одно из полностью поляризованных состояний (3.1). При этом квантовый спин внешне ведет себя как классический бистабильный элемент, например, триггер, множество возможных состояний которого содержит только два элемента. В результате, измеряя проекцию спина, мы можем получить не более одного бита информации вместо того огромного массива, которую этот спин реально «помнит».

Такую элементарную квантовую ячейку памяти или элементарный квантовый носитель информации называют кубитом, от английского quantum bit = qubit. Основное отличие кубита от его классических аналогов (триггера, бинарного электрического или светового сигнала и т. п.) состоит в том, что он имеет не два, а бесконечно много различных состояний и, соответственно, очень богатую собственную динамику. И хотя при измерении, произведенном над кубитом, можно получить лишь одно из двух значений измеряемой физической величины, «знает» кубит неизмеримо больше, чем «говорит».

Состояния (3.1), в которых проекция спина имеет определенные значения, являются квантовыми аналогами состояний классического бистабильного элемента. Их называют состояниями вычислительного базиса. По ним как по любому базису, порожденному эрмитовым оператором, может быть

разложен произвольный спинор второго ранга. Примером такого разложения служит суперпозиция состояний (4.1).

Электронный спин, свойства которого мы только что обсуждали, является не единственным вариантом физической реализации кубита. На сегодня предложено много других способов построить кубит, причем некоторые из них осуществлены на практике.

5. КВАНТОВЫЙ КОМПЬЮТЕР, ИЛИ КАК ЗАСТАВИТЬ КУБИТЫ РАБОТАТЬ

Способность кубитов хранить огромные объемы информации делает их очень привлекательными для тех, кто разрабатывает новые информационные системы. Можно ли, однако, практически использовать связанный с кубитами почти неограниченный информационный ресурс?

Если в процессе обработки информации с использованием кубитов над ними будут производиться те или иные измерения, то, как мы видели, ничего особо интересного ожидать не следует. В лучшем случае кубиты будут работать как обычные классические элементы хранения и переноса информации, потребляющие, правда, в силу своих наноскопических размеров очень мало энергии. Это значит, что, построив из кубитов компьютер, работающий на традиционных принципах (запись-считывание-преобразование-передача...), мы получили бы очень маленькую, экономичную, быстроходную, но все же обычную вычислительную машину. Эта машина была бы невероятно дорогой как в изготовлении (сборка атомного уровня), так и в эксплуатации (сверхнизкие температуры, сверхглубокий вакуум и т. п.). Но самым досадным было бы то, что квантовый информационный ресурс, из-за которого, собственно, и стоило «городить огород», остался бы неиспользованным.

Как реализовать огромную информационную емкость кубитов? Как заставить их работать в полную силу? Из сказанного ясно, что это можно сделать, лишь исключив процессы макроскопических измерений состояний кубитов в ходе обработки информации. Это значит, что в настоящем квантовом компьютере при выполнении вычислений кубиты должны взаимодействовать только с себе подобными, т. е. с квантовыми, микроскопическими объектами, например, с другими кубитами. Измерение же их физических характеристик (наблюдаемых) с помощью макроскопических приборов должно произво-

даться только на самом последнем этапе – на этапе считывания полученного результата или, как говорят, при выводе информации.

При такой организации вычислительного процесса, когда полностью исключено влияние внешних макроскопических факторов, кубит или ансамбль кубитов работает как изолированная система, подчиняющаяся законам квантовой механики. Состояние этой системы описывается волновой функцией, которая содержит в себе всю информацию об этом состоянии, в том числе и информацию типа той, что заключена в коэффициентах суперпозиций типа (4.1), (4.2). Другими словами, находясь в чисто квантовом окружении, кубит ведет себя уже не как простейшая классическая ячейка памяти с двумя устойчивыми состояниями, а как полноценный квантовый элемент, «знающий» и «помнящий» всю волновую функцию, в том числе, конечно, и коэффициенты ее разложения по вычислительному базису.

При изменении волновой функции во времени содержащаяся в ней информация меняется, преобразуется. Происходит это, при условии полной изоляции квантовой системы от макроскопического окружения, по строго определенным правилам. Они диктуются основным уравнением квантовой механики – уравнением Шредингера.

Предположим, что нам удалось каким-то способом закодировать исходные данные для наших вычислений в виде волновой функции определенного вида, а временную эволюцию этой функции организовать так, чтобы при этом происходила обработка (преобразование) исходных данных по нужной нам программе. Последнего можно добиться, по крайней мере, в принципе, поместив кубит в те или иные внешние поля, организовав его взаимодействие с другими кубитами и т. д., т. е. на этапе строительства квантового компьютера. Включив этот компьютер и приготовив его начальное состояние в соответствии с видом стартовой волновой функции, мы по прошествии некоторого времени получим преобразованную волновую функцию, которая будет содержать в себе результаты обработки исходных данных. Если выбрать это время так, чтобы оно соответствовало выполнению всех требуемых нами операций (т. е. окончанию работы нашей программы), то мы получим искомый набор данных – результат вычислений. Правда, эти данные будут закодированы в виде волновой функции конечного квантового состояния, над которым для их считывания надо будет произвести макроскопическое измерение. Проведя это измерение, мы извлечем требуемые данные, но

конечное квантовое состояние будет разрушено. Теперь это, однако, уже не страшно, ибо наше квантовое вычисление завершено. Квантовый компьютер можно выключить.

6. СКОЛЬКО БИТ В КУБИТЕ

Мы видим, что полноценно работать с кубитами как носителями квантовой информации, в принципе, можно. Для этого требуется изоляция построенной из них системы, например, квантового компьютера, от макроскопического окружения и предельно деликатное обращение с ней. Сразу же возникают вопросы – можно ли оценить информационную емкость кубитов количественно и насколько велик этот информационный ресурс. Обратимся сначала к одиночному кубиту.

Для задания его состояния, т. е. волновой функции в виде спинора требуется фиксировать два комплексных числа – амплитуды α и β . Эти числа не независимы, ибо спинор должен удовлетворять условию нормировки (2.3), а α и β , соответственно, подчиняться условию (4.3). Отсюда следует, что для задания двух комплексных амплитуд требуется не четыре, как в общем случае, а только три вещественных числа. Их можно выбрать так, чтобы спинор произвольного вида, скажем, (4.2), приобрел форму:

$$\chi = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} \chi_{\uparrow} + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \chi_{\downarrow} \right), \quad (6.1)$$

где θ , φ и γ – вещественные угловые переменные. Использование в (6.1) тригонометрических функций автоматически обеспечивает нормировку спинора. Угол φ , как легко видеть, играет роль относительной фазы компонент суперпозиции, а γ представляется собой общую фазу волновой функции. Эту фазу можно игнорировать, так как ее учет не приводит к каким-либо наблюдаемым эффектам. По этой причине выражение (6.1) фактически сводится к спинору

$$\chi = \left(\cos \frac{\theta}{2} \chi_{\uparrow} + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \chi_{\downarrow} \right), \quad (6.2)$$

который зависит только от двух углов – θ и φ . Углы θ и φ меняются в пределах $(0, \pi)$ и $(0, 2\pi)$ соответственно и задают точку на трехмерной сферической поверхности, которую называют сферой Блоха. Эта сфера позволяет

очень наглядно представлять состояние одиночного спина (кубита), а также изменение этого состояния при различных манипуляциях с ним. Так, например, состояниям

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

соответствуют северный и южный полюсы сферы Блоха, а суперпозиции

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{\uparrow} + e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{\downarrow} \right) \quad (6.4)$$

отвечает точка на экваторе.

Итак, чтобы однозначно зафиксировать состояние кубита, требуется задать два угла, т. е. точку на сфере Блоха. Множество таких точек бесконечно велико, они образуют двумерный континуум. Это значит, что один кубит может хранить, в принципе, бесконечный объем информации.

Реально, конечно, этот объем всегда ограничен. Он определяется количеством практически различимых значений θ и φ , т. е. той точностью, с которой другие элементы квантовой системы могут разрешать (воспринимать как различные) соседние состояния нашего кубита. Эта точность лимитируется многими факторами, среди которых главную роль играет взаимодействие с макроскопическим окружением, которое приводит к медленному необратимому разрушению квантового состояния (декогерентизации или декогеренции). В то же время, хотя точность определения квантового состояния конечна, она может быть весьма высокой. Это значит, что одиночный кубит может хранить объем информации много больший, чем один бит.

Положим для примера, что квантовое окружение кубита способно различать численные характеристики его состояния с разрешением в 8 бит. Поскольку таких характеристик две, кубит будет эффективно хранить или переносить 16 бит информации. Это совсем неплохо. Однако еще более радужные перспективы открывает использование нескольких кубитов.

Рассмотрим систему из двух кубитов. Как легко сообразить, ее вычислительный базис содержит четыре спинора:

$$\chi_{\uparrow\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2, \quad \chi_{\uparrow\downarrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2, \quad \chi_{\downarrow\uparrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2, \quad \chi_{\downarrow\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2, \quad (6.5)$$

где индексами 1 и 2 помечены состояния первого и второго кубитов. Волновая функция, описывающая произвольное квантовое состояние системы из двух кубитов, будет, очевидно, иметь вид:

$$\chi = \alpha\chi_{\uparrow\uparrow} + \beta\chi_{\uparrow\downarrow} + \gamma\chi_{\downarrow\uparrow} + \delta\chi_{\downarrow\downarrow}. \quad (6.6)$$

Эта функция задается четырьмя комплексными амплитудами или, с учетом нормировки и того, что общая фаза несущественна, шестью вещественными числами. Если каждое из этих чисел мы опять зафиксируем с 8-битовой точностью, то спинор (6.6) «запомнит» 48 бит или 6 байт информации.

Пусть теперь в нашем распоряжении n кубитов. Вычислительный базис такой системы содержит 2^n элементов, а ее волновая функция зависит соответственно от 2^n амплитуд. Много это или мало? При $n = 10$ $2^n \approx 1000$, и, даже если все амплитуды мы возьмем вещественными, информационная емкость нашей системы составит $8 \text{ бит} \cdot 2 \cdot 1000 = 2$ килобайта. При $n = 50$ объем хранимой информации возрастет до 2000 терабайт, что превосходит возможности современных компьютеров. Наконец, если взять $n = 300$, то число амплитуд в разложении волновой функции превысит 10^{90} . Такого же уровня (в байтах) достигнет и информационная емкость системы.

Это по-настоящему большое число. Чтобы почувствовать его масштаб, оценим количество атомов в видимой нами части Вселенной. Поскольку возраст Вселенной равен примерно 14 миллиардам лет, диаметр видимой ее части составляет около 28 миллиардов световых лет. Один световой год – это $(3 \cdot 10^8 \text{ м/с}) \cdot (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с}) = 0.95 \cdot 10^{16}$ метров. Значит, видимая Вселенная занимает, по порядку величины, $(28 \cdot 10^9 \cdot 10^{16})^3 \sim 10^{79} \text{ м}^3$. Основное вещество во Вселенной – водород. Его распределение в космосе весьма неоднородно, однако в областях, где концентрация межзвездного водорода максимальна (например, вблизи плоскости нашей галактики), эта концентрация не больше 10^4 м^{-3} . Даже если принять (с очень сильным завышением) эту величину за среднюю, то окажется, что в видимой части Вселенной содержится не более 10^{83} частиц. Таким образом, используя всего 300 спинов, можно записать число байтов, которое превосходит количество атомов во Вселенной. Понятно, что такие объемы информации невозможно хранить ни на каком мыслимом классическом компьютере.

7. ОПЕРАЦИИ С КУБИТОМ

Итак, кубиты являются очень эффективными средствами хранения и переноса информации, на их основе можно построить компьютер, работающий по законам квантовой механики. Ключевыми процессами, происходящими в квантовом компьютере, должны быть операции преобразования состояний отдельных кубитов. В классической информатике нетривиальных операций, которые можно проделать с одной ячейкой памяти (битом), всего одна – перевод ячейки из состояния 0 в состояние 1 или наоборот. Ее называют инверсией, а соответствующее устройство – логическим элементом NOT (НЕ).

Попробуем выяснить, как бы мог выглядеть квантовый логический элемент NOT. По аналогии с классикой естественно предположить, что такой элемент должен переводить друг в друга квантовые состояния 0 и 1 или, на спиновом языке, состояния с определенными значениями проекции спина:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Для квантового логического элемента, однако, столь простой таблицы значений недостаточно. Дело в том, что помимо состояний (6.3) кубит может находиться в огромном количестве других состояний, имеющих вид суперпозиций (4.1). Что квантовый элемент NOT будет делать с ними? Очевидно, он тоже должен преобразовывать их, т. е. превращать одну суперпозицию в другую. Есть ли в квантовой механике готовые математические инструменты для превращения одних волновых функций в другие? Да, есть, и они называются операторами. Применительно к спину таких основных операторов три, каждый из них пропорционален соответствующей матрице Паули. Выберем из этих матриц такую, которая воспроизводила бы классическую логику (7.1). Нетрудно сообразить, что на эту роль подходит матрица

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Остановившись на этом выборе квантового элемента NOT, мы можем теперь выяснить, как он будет работать на всем пространстве спиновых волновых функций. Введем принятое в информатике обозначение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X}. \quad (7.4)$$

Тогда, как легко видеть,

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Квантовый элемент NOT, оказывается, просто переставляет компоненты спинора или, что то же самое, коэффициенты в суперпозициях вида (4.1).

Исчерпывает ли квантовый элемент \mathbf{X} однокубитовую логику? Нет. Дело все в том, что кубит устроен значительно сложнее своего классического аналога. Он может хранить информацию не только в виде дискретных значений амплитуд своих компонент (0 или 1), но и в форме их относительной фазы φ (см., например, (6.2), (6.4)). Это значит, что любой оператор, меняющий эту фазу, должен входить в набор квантовых логических элементов. Рассмотрим в этой связи элемент

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

совпадающий по своему устройству с матрицей Паули σ_z . Его действие на произвольный кубит выражается соотношением

$$\mathbf{Z} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

и сводится к изменению относительной фазы на 180° . На базисные состояния (3.1) элемент \mathbf{Z} действует как тождественный: он оставляет неизменным χ_\uparrow , а у χ_\downarrow меняет фазу, что не приводит к наблюдаемым последствиям.

Еще одним важным квантовым логическим элементом является элемент Адамара. Он задается матрицей

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

и представляет собой фактически сумму \mathbf{X} и \mathbf{Z} , которая снабжена численным множителем, обеспечивающим сохранение нормировки. Как действует элемент Адамара на простейшие состояния (3.1)? Он превращает их в симметричные суперпозиции, отличающиеся друг от друга только знаком второй компоненты:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

Это выглядит так, как будто трансформируя состояния вычислительного базиса, \mathbf{H} оставляет их «на полпути» между χ_{\uparrow} и χ_{\downarrow} . Интересно выяснить, что даст повторное применение элемента Адамара, т. е. произойдет ли «поворот» χ_{\uparrow} до χ_{\downarrow} и наоборот. Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Наши ожидания не оправдались – вместо поворота элемент Адамара вернул базисным состояниям их первоначальный вид. Это не связано со спецификой этих состояний. Легко доказать, что двукратное применение \mathbf{H} к любому кубиту эквивалентно тождественному преобразованию, т. е. $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$.

Мы рассмотрели три однокубитовых логических элемента. Возникает вопрос: сколько таких элементов вообще может быть? Поскольку разных квантовых состояний у кубита бесконечно много, множество преобразований этих состояний друг в друга также должно быть бесконечным. На роль такого преобразования, однако, нельзя взять любую матрицу 2×2 . Дело в том, что матрицы квантовых логических элементов действуют на волновые функции и, следовательно, они должны сохранять их нормировку, т. е. суммарную вероятность получения всех возможных значений измеряемой величины. Такие матрицы называют унитарными. По определению, унитарные матрицы обладают следующим свойством:

$$\mathbf{U}^+ \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \text{или} \quad \mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^{-1}, \quad (7.11)$$

где \mathbf{U}^+ есть эрмитово сопряженная матрица, получающаяся из \mathbf{U} транспонированием и комплексным сопряжением, а \mathbf{U}^{-1} – обратная матрица. Легко проверить, что матрицы элементов \mathbf{X} , \mathbf{Z} и \mathbf{H} унитарны. Унитарность довольно

сильно ограничивает структуру квантовых логических элементов. Можно показать, что унитарная матрица 2×2 однозначно определяется всего четырьмя вещественными числами, тогда как для задания произвольной матрицы требуется четыре комплексных числа, т. е. восемь вещественных.

Самым замечательным и важным для практики является то, что любой из бесконечного набора однокубитовых логических элементов, задаваемых унитарными матрицами, может быть реализован физически.

8. ЭЛЕМЕНТ СДВИГА ФАЗЫ И ПОЛНАЯ ОДНОКУБИТОВАЯ ЛОГИКА

Рассмотрим еще один однокубитовый логический элемент. Его действие задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \Phi(\varphi) \quad (8.1)$$

и сводится к сдвигу относительной фазы компонент кубита на угол φ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Логический элемент Φ обладает замечательным свойством: используя только Φ и элемент Адамара \mathbf{H} , можно получить из состояния вычислительного базиса χ_{\uparrow} любой другой кубит, т. е. кубит произвольного вида.

Чтобы убедиться в этом, применим к χ_{\uparrow} последовательно логические операции \mathbf{H} , $\Phi(\theta)$, \mathbf{H} и $\Phi(\varphi + \pi/2)$. Как видно из (7.9), элемент Адамара превращает χ_{\uparrow} в суперпозицию $(\chi_{\uparrow} + \chi_{\downarrow})/\sqrt{2}$. Действуя на нее элементом сдвига фазы, мы получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

а повторное применение элемента Адамара даст:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\theta} \\ 1 - e^{i\theta} \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Вынося за скобки фазовый множитель $e^{i\theta/2}$, представим кубит (8.4) в виде

$$e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Опуская общую фазу, не влияющую на физические результаты, и применяя второй элемент сдвига фазы, окончательно найдем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i(\varphi+\pi/2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Но именно такому выражению отвечает параметризация (6.2) произвольного кубита точкой с угловыми координатами θ и φ на сфере Блоха. Это значит, что использованная нами логическая цепочка действительно позволяет получить любое состояние кубита из состояния вычислительного базиса χ_{\uparrow} .

Как мы знаем, все квантовые логические элементы обратимы. Следовательно, наряду с прямым преобразованием мы можем осуществить и обратный переход, т. е. перевести произвольный кубит в состояние χ_{\uparrow} . Для этого достаточно применить к (8.6) элементы $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$, $\Phi(-\theta)$ и $\Phi(-\varphi-\pi/2)$ в порядке, обратном тому, который использовался выше. А отсюда сразу же следует, что, комбинируя лишь два логических элемента и подбирая фазы θ , φ для прямого и обратного преобразований, можно превратить произвольный кубит вида (8.6) в любой другой. В этом смысле элементы \mathbf{H} и Φ полностью исчерпывают однокубитовую логику.

9. ДВУХКУБИТОВЫЕ ОПЕРАЦИИ

Многообразие операций с одним кубитом наводит на мысль о том, что два кубита тоже можно преобразовывать огромным числом способов. Эта мысль, конечно, верна, но требует существенных пояснений.

В классической информатике существует несколько элементарных логических операций с двумя битами, на которых основано действие любой цифровой системы. К ним принадлежат элементы AND (И), OR (ИЛИ), NAND (НЕ-И) и некоторые другие. Все эти элементы устроены так, что, имея на

входе два бита, они выдают в качестве выходного сигнала один бит. Например, классический элемент AND складывает входные биты по модулю два, т. е. дает на выходе одно двоичное число. Его действие, как и у многих других классических элементов, необратимо: по выходному сигналу невозможно однозначно восстановить входные.

Квантовый логический элемент, построенный для работы с двумя кубитами, в принципе не может действовать таким образом. Он должен преобразовывать волновую функцию двух кубитов в подобную же волновую функцию. Двум входным кубитам отвечает четырехмерный вектор состояния (6.6), который можно записать в дираковских обозначениях, положив

$$\chi_{\uparrow\uparrow} = |00\rangle, \quad \chi_{\uparrow\downarrow} = |01\rangle, \quad \chi_{\downarrow\uparrow} = |10\rangle, \quad \chi_{\downarrow\downarrow} = |11\rangle. \quad (9.1)$$

Дираковские скобки удобны своей универсальностью, т. е. тем, что через $|abc\dots\rangle$ можно обозначать не только произведения спиноров, но и волновые функции любых физических объектов, реализующих кубиты. Итак, произвольная волновая функция двух кубитов может быть представлена в форме:

$$\chi = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle. \quad (9.2)$$

Все, что может сделать квантовый логический элемент, это преобразовать (9.2) в вектор состояния того же вида

$$\chi' = \alpha'|00\rangle + \beta'|01\rangle + \gamma'|10\rangle + \delta'|11\rangle. \quad (9.3)$$

Матрица такого преобразования должна быть унитарной. Унитарная матрица обязательно имеет обратную, поскольку $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^+$, а эрмитово сопряженная матрица существует всегда – это видно из ее определения. Значит, если есть квантовый логический элемент, превращающий (9.2) в (9.3), то есть и другой элемент, осуществляющий обратное преобразование. Квантовые логические операции всегда обратимы, и в этом состоит их принципиальное отличие от операций классических.

10. КВАНТОВЫЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ CNOT

Рассмотрим квантовый логический элемент, называемый controlled-NOT = CNOT (управляемое НЕ). Он имеет два входа – управляющий и управ-

ляемый. Если на управляющий вход подан кубит в состоянии 0, то в управляемом канале кубит не меняется. Если же управляющий кубит находится в состоянии 1, то управляемый кубит инвертируется. Сам управляющий кубит (0 или 1) проходит через элемент CNOT неизменным. Таблица операций этого элемента над состояниями вычислительного базиса выглядит так:

$$|00\rangle \Rightarrow |00\rangle, \quad |01\rangle \Rightarrow |01\rangle, \quad |10\rangle \Rightarrow |11\rangle, \quad |11\rangle \Rightarrow |10\rangle. \quad (10.1)$$

Запишем базисные состояния в виде векторов в четырехмерном пространстве амплитуд α , β , γ и δ :

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Тогда, как нетрудно видеть, логике (10.1) будет отвечать матрица

$$\mathbf{U}_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

Действие элемента CNOT на состояния вычислительного базиса очень просто выражается с помощью математической операции, обозначаемой символом \oplus и называемой сложением по модулю два. Она определена на множестве, состоящем из чисел 0 и 1, и задается следующей таблицей:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0. \quad (10.4)$$

На языке сложения по модулю два действие элемента CNOT есть не что иное как

$$|A, B\rangle \Rightarrow |A, A \oplus B\rangle, \quad (10.5)$$

где $A, B = 0, 1$. Схематическое (графическое) изображение этого элемента приведено на рис. 10.1. Верхняя горизонтальная линия слева отвечает входному управляющему кубиту, нижняя – управляемому, а горизонтальными линиями справа обозначены выходящие кубиты. Эта схема наглядно воспроизводит логику (10.5), согласно которой элемент CNOT складывает по

модулю два управляющий и управляемый кубиты и записывает результат в управляемом кубите.

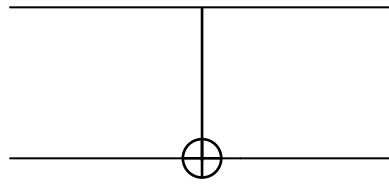


Рис. 10.1. Квантовый элемент CNOT.

Как действует квантовый элемент CNOT на произвольное управляемое состояние $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$? Рассмотрим сначала частные случаи, когда 1) управляющий кубит находится в состоянии 0 и 2) он установлен в состояние 1. Первому случаю отвечает преобразование

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10.6)$$

оставляющее управляемый кубит без изменений. Во втором варианте происходит трансформация

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (10.7)$$

которая есть не что иное, как инверсия состояния управляемого кубита. В общем же случае действие элемента CNOT выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

Видно, что это действие распадается на два независимых преобразования, каждое из которых происходит в подпространствах, отвечающих базисным

состояниям управляющего кубита $|0\rangle$, $|1\rangle$. При этом вероятность обнаружить управляемый кубит, скажем, в состоянии $|1\rangle$ изменяется с $|\beta|^2 + |\delta|^2$ на $|\beta|^2 + |\gamma|^2$, тогда как вероятность обнаружить в таком же состоянии управляющий кубит $|\gamma|^2 + |\delta|^2$ остается неизменной.

Помимо элемента CNOT существует много других важных и интересных квантовых логических элементов. Этот элемент, однако, играет в квантовой информатике особую роль. Доказано (теорема полноты), что любой многокубитовый логический элемент можно построить, комбинируя лишь CNOT и однокубитовые элементы.

11. МОЖНО ЛИ КОПИРОВАТЬ КУБИТ?

Очень важной и малоприятной для практики особенностью кубита является то, что его невозможно копировать. В этом пункте квантовая информатика радикально отличается от классической. Действительно, классическую информацию можно размножить без каких-либо принципиальных ограничений. Речь идет не только о записи на внешние носители типа флэш-памяти или лазерных дисков. И «внутри» классического компьютера двоичный ноль или единицу можно записать как в одну, так и в несколько ячеек оперативной памяти, скопировать в несколько разрядов регистра процессора и т. д. С кубитом такого сделать нельзя.

Этот факт естественным образом вытекает из основных положений квантовой механики. Вдумаемся, что представляет собой операция копирования. Фактически это есть считывание состояния кубита и последующая его запись в другом кубите. Но считывание – это типичное квантовое измерение, которое, как мы знаем, неизбежно разрушает исходное состояние. Исходное состояние при этом, конечно, окончательно не погибает, оно просто «переселяется» на другой носитель. Однако общее число носителей этого состояния в результате не увеличивается, т. е. реального копирования не происходит.

Чтобы посмотреть, как работает теорема о невозможности копирования кубитов (no cloning theorem) в конкретной ситуации, обратимся к следующему примеру. Попробуем скопировать кубит с помощью только что изученного нами квантового элемента CNOT. Поскольку в управляющем канале CNOT сигнал вообще не меняется, копию произвольного кубита можно пытаться получить только на выходе управляемого канала. На вход управ-

ляющего канала следует подать копируемый кубит, а на вход управляемого – произвольный (инициирующий), который пропадет при копировании.

Начнем с состояний вычислительного базиса $|0\rangle, |1\rangle$. Инициуем вход управляемого канала кубитом $|0\rangle$ и такой же кубит используем для управления. В этом случае на выходе мы получим $|0\rangle|0\rangle$, что выглядит как две копии исходного (управляющего) кубита $|0\rangle$. Подадим теперь на управляющий вход $|1\rangle$. На выходе, как легко видеть, будет $|1\rangle|1\rangle$, т. е. опять две копии исходного кубита. Но квантовые состояния $|0\rangle, |1\rangle$ эквивалентны двум возможным состояниям классического бистабильного элемента (бита). Поэтому можно сказать, что классические биты квантовый элемент CNOT копирует. На матричном языке это выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

А теперь попробуем скопировать произвольный кубит. Если подать на управляющий вход $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, а на управляемый – $|0\rangle$, то исходная суперпозиция будет иметь вид:

$$\chi = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle. \quad (11.2)$$

Подействовав на этот вектор состояния матрицей (10.3), мы получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

Это состояние двух кубитов есть суперпозиция $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$. Она радикально отличается от состояния

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \alpha\beta|10\rangle + \beta^2|11\rangle, \quad (11.4)$$

которое должно было бы получиться на выходе элемента CNOT, если бы он мог копировать кубиты. Легко проверить, что инициация управляемого входа кубитом $|1\rangle$ дает аналогичный результат. Это значит, что копирование произвольного кубита с помощью квантового элемента CNOT невозможно.

12. КВАНТОВЫЕ СХЕМЫ

Итак, кубиты могут хранить и переносить квантовую информацию, т. е. работать в квантовых информационных системах в качестве ячеек памяти и проводов. Квантовые логические элементы способны изменять состояния кубитов, т. е. делать то, что делают операционные ячейки, регистры и т. п. в обычных компьютерах. Имея кубиты и квантовые логические элементы, можно строить квантовые схемы. Задачей таких схем является преобразование по определенным программам (алгоритмам) квантовой информации и, конечно, ее передача другим схемам.

Рассмотрим в качестве примера простую квантовую схему, изображенную на рис. 12.1. Выясним, какую операцию она производит над входными кубитами. Начнем с состояний вычислительного базиса. Если ограничиться

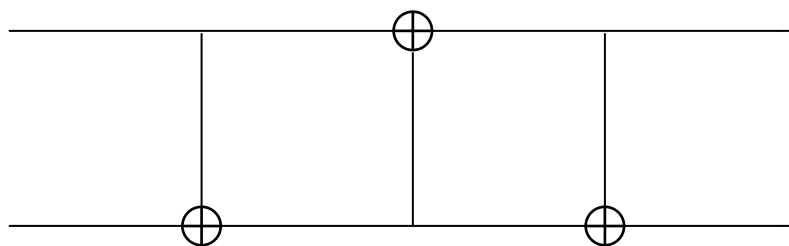


Рис. 12.1. Квантовая схема из трех элементов CNOT.

только ими, то действие каждого из элементов будет описываться простым выражением (10.5). Последовательной работе первых двух элементов CNOT отвечает в этом случае следующая логическая цепочка:

$$|A, B\rangle \Rightarrow |A, A \oplus B\rangle \Rightarrow |A \oplus (A \oplus B), A \oplus B\rangle = |B, A \oplus B\rangle; \quad (12.1)$$

здесь учтено, что $A \oplus (A \oplus B) = B$. Третий элемент завершает операцию:

$$|B, A \oplus B\rangle \Rightarrow |B, (A \oplus B) \oplus B\rangle = |B, A\rangle. \quad (12.2)$$

Таким образом, проходя через схему рис. 12.1, два кубита вычислительного базиса обмениваются своими состояниями.

Останется ли справедливым этот простой рецепт для входных кубитов произвольного вида? Подадим на управляющий вход нашей схемы кубит с вектором состояния $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, а на управляемый – кубит в состоянии $\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$. Входному состоянию в этом случае будет отвечать суперпозиция

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle. \quad (12.3)$$

Действие на нее первого элемента CNOT сводится к преобразованию:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\delta \\ \beta\gamma \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Для второго элемента, как видно из рис. 12.1, выходной управляемый кубит первого CNOT является управляющим и наоборот. Поэтому действие второго элемента описывается видоизмененной матрицей \mathbf{U}_{CNOT} . Ее можно найти, положив, что первому символу в кет-векторе $|A,B\rangle$ отвечает управляемый кубит, а второму – управляющий, и взяв за основу надлежащий аналог логики (10.1). С учетом этой модификации

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\delta \\ \beta\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \\ \alpha\delta \end{pmatrix}. \quad (12.5)$$

Наконец, третий элемент схемы, действуя на результат (12.5), дает:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \\ \alpha\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \beta\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\delta \end{pmatrix}. \quad (12.6)$$

Запишем полученный вектор состояния в виде суперпозиции

$$\alpha\gamma|00\rangle + \beta\gamma|01\rangle + \alpha\delta|10\rangle + \beta\delta|11\rangle, \quad (12.7)$$

которая, как нетрудно видеть, может быть представлена в виде произведения однокубитовых волновых функций

$$(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle). \quad (12.8)$$

Сравнивая это произведение с (12.3), мы видим, что схема рис. 12.1 осуществляет обмен состояниями и в случае кубитов произвольного вида.

13. СОСТОЯНИЯ БЕЛЛА

Рассмотрим еще одну квантовую схему. Она изображена на рис. 13.1 и замечательна тем, что превращает пары состояний вычислительного базиса в двухкубитовые суперпозиции, которые называют состояниями Белла или ЭПР состояниями (состояниями Эйнштейна-Подольского-Розена). Иногда говорят, что кубиты, находящиеся в таких состояниях, образуют ЭПР пару.

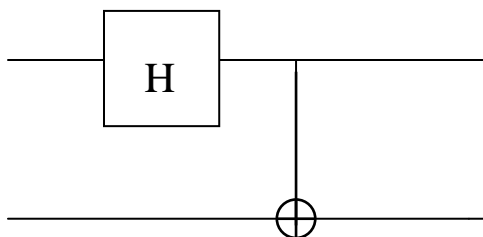


Рис. 13.1. Квантовая схема, генерирующая состояния Белла.

Итак, возьмем в качестве начального состояние вычислительного базиса $|00\rangle$, т. е. подадим на оба входа схемы рис. 13.1 кубиты $|0\rangle$. Первый из них (верхний), пройдя через элемент Адамара, превратится согласно формуле (7.9) в суперпозицию $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Таким образом, на входе элемента CNOT будет состояние $(|00\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$. Чтобы найти состояние кубитов на выходе нашей схемы, подействуем на четырехмерный вектор, отвечающий суперпозиции $(|00\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$, матрицей (10.3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (13.1)$$

Результатом оказалось двухкубитовое состояние

$$\beta_{00} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (13.2)$$

которое является одним из четырех состояний Белла. Остальные три можно получить, подавая на вход схемы рис. 13.1 оставшиеся состояния вычислительного базиса $|01\rangle$, $|10\rangle$ и $|11\rangle$. Вся четверка белловских состояний выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_{00} &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, & \beta_{01} &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \\ \beta_{10} &= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, & \beta_{11} &= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Индексы у символа β_{xy} показывают, каким базисным состоянием порождено соответствующее состояние Белла.

Белловские состояния (состояния ЭПР) и им подобные обладают очень странными, во многом уникальными свойствами. Эти свойства лежат в основе квантовой телепортации и множества других квантовых «чудес». Мы остановимся на некоторых из этих таинственных явлений позже, а пока отметим лишь одну особенность состояний (13.3). В отличие от состояний вычислительного базиса, распадающихся на однокубитовые волновые функции: $|A, B\rangle = |A\rangle|B\rangle$, суперпозиции Белла не могут быть представлены в виде произведений векторов состояний одиночных кубитов. Это значит, что они описывают квантовые системы, составные части которых ведут себя взаимозависимо, как бы «чувствуя» друг друга. Такая необычная взаимосвязь, выражающаяся в скоррелированном поведении частей системы, регистрируется экспериментально, в том числе и тогда, когда эти части разнесены на макроскопически большие расстояния. Как было показано Дж. Беллом в 1964 г., квантовые корреляции очень специфичны и радикально отличаются от своих классических аналогов. В частности, они являются более сильными, чем любые корреляции, допускаемые классической физикой.

Сегодня белловские состояния широко используются при исследовании квантовых корреляций в системах многих частиц и, в более широком плане,

для изучения наиболее глубоких, фундаментальных свойств окружающего мира (локальность, реализм, причинность и т. п.). В квантовой информатике состояния Белла и их многокубитовые аналоги играют ключевую роль.

14. ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КУБИТОВ И ОДНОКУБИТОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

В качестве кубита можно использовать любую двухуровневую систему или, точнее, любой квантовый объект, имеющий два ортогональных стационарных состояния. Этот объект должен быть устроен так, чтобы с помощью внешних воздействий мы могли: 1) приводить его в требуемое начальное состояние, 2) заставлять эволюционировать это состояние нужным нам образом и 3) считывать конечное состояние после завершения процесса обработки или передачи информации. Очень важно, чтобы кубит был надежно изолирован от макроскопического окружения и в то же время эффективно взаимодействовал с другими кубитами, участвующими в квантовом вычислении. Он также должен быть достаточно чувствительным к управляющим воздействиям, при помощи которых осуществляются запись, обработка и считывание информации. На сегодня предложено много вариантов физической реализации кубитов. В роли носителей квантовой информации используются фотоны оптического и микроволнового диапазонов, спины электронов и ядер, атомы и ионы, сверхпроводниковые элементы и т. п.

14.1. Свободный спин

Рассмотрим в качестве простейшей модели кубита спин электрона или атомного ядра; в последнем случае будем считать, что $s = \hbar/2$. отождествим с базисными состояниями $|0\rangle, |1\rangle$ спиноры, отвечающие определенным значениям s_z :

$$|0\rangle = \chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.1)$$

В виде спинора можно записать и любую суперпозиция этих состояний:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (14.2)$$

Как можно управлять состоянием спина или, как говорят иногда, манипулировать им? Поскольку спин является не только механическим, но и магнитным моментом, на него можно воздействовать внешним магнитным полем. Предположим, что область пространства, доступная нашей частице, достаточно мала. Тогда в пределах этой области внешнее магнитное поле можно считать однородным, т. е. не зависящим от координат. В этих условиях движение частицы в пространстве и эволюция ее спина будут происходить независимо друг от друга. Это значит, что волновая функция частицы будет представлять собой произведение координатной и спиновой составляющих.

Как известно, в общем случае движение заряженной частицы со спином $\frac{1}{2}$ описывается уравнением Паули, которое есть нерелятивистское обобщение уравнения Шредингера на случай ненулевого магнитного поля. В нашей ситуации по причинам, указанным выше, для спиновой компоненты волновой функции можно написать отдельное – укороченное – уравнение Паули, в котором роль гамильтониана играет оператор энергии спина в магнитном поле. Это уравнение имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\gamma \mathbf{B} \hat{\mathbf{s}} \chi, \quad (14.3)$$

где \mathbf{B} – вектор индукции магнитного поля, $\hat{\mathbf{s}} = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$ – оператор вектора спина, а γ – гиромагнитное отношение. Для электронного спина $\gamma = -e/m$, где e и m – заряд и масса электрона.

Итак, поместим спин в магнитное поле $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$, перпендикулярное оси z . Подставляя в (14.3) χ в виде (14.2) и учитывая, что в скалярном произведении $\mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}$ отлично от нуля только слагаемое $B\hat{s}_x = B(\hbar/2)\sigma_x$, для компонент спинора α и β получим:

$$i\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\gamma B \frac{\hbar}{2} \beta, \quad i\hbar \frac{\partial \beta}{\partial t} = -\gamma B \frac{\hbar}{2} \alpha. \quad (14.4)$$

Введем далее обозначение

$$\frac{1}{2} \gamma B = \omega_L \quad (14.5)$$

и примем, что в начальный момент времени $t = 0$ амплитуды α и β равнялись соответственно $\alpha(0)$ и $\beta(0)$. Тогда решение системы уравнений (14.4) будет иметь вид:

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \alpha(0) \cos \omega_L t + i \beta(0) \sin \omega_L t \\ i \alpha(0) \sin \omega_L t + \beta(0) \cos \omega_L t \end{pmatrix}. \quad (14.6)$$

Как меняется во времени ориентация спина, чье состояние описывается спинором (14.6)? Чтобы выяснить это, возьмем в качестве начального состояния χ_{\uparrow} , т. е. положим $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$. Такой выбор означает, что при $t = 0$ спин был направлен вдоль оси z . В произвольный же момент времени его состояние задается спинором

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_L t \\ i \sin \omega_L t \end{pmatrix}. \quad (14.7)$$

Из этого выражения следует, что вероятность w_{\uparrow} получить при измерении $s_z = \hbar/2$ равна $\cos^2 \omega_L t$, в то время как вероятность противоположного результата ($s_z = -\hbar/2$) $w_{\downarrow} = \sin^2 \omega_L t$. Таким образом, под действием магнитного поля проекция спина на ось z колеблется во времени, причем частота колебаний пропорциональна B .

Чтобы понять физическую природу этих колебаний, найдем среднее значение проекции спина на другую ось – ось y . Воспользовавшись известным выражением для оператора \hat{s}_y , получим:

$$\overline{s_y} = (\cos \omega_L t, \quad -i \sin \omega_L t) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_L t \\ i \sin \omega_L t \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sin(2\omega_L t). \quad (14.8)$$

Сравним этот результат с его аналогом для s_z :

$$\overline{s_z} = \frac{\hbar}{2} \cos^2 \omega_L t - \frac{\hbar}{2} \sin^2 \omega_L t = \frac{\hbar}{2} \cos(2\omega_L t). \quad (14.9)$$

Как видно, проекция s_y колеблется с той же частотой что и s_z , отставая от нее по фазе на $\pi/2$. Поскольку модуль вектора \mathbf{s} фиксирован, ясно, что такое движение есть не что иное, как вращение спина в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, т. е. прецессия. Интересно, что, хотя спин – чисто квантовое свойство частицы (в классической механике спина нет), формула для ларморовской частоты не содержит постоянной Планка. Это значит, что факт прецессии момента в постоянном внешнем поле нечувствителен к происхождению этого момента, а сама прецессия как физическое явление имеет классическую природу. Заметим, что, как следует из формул (14.8) и (14.9), частота прецессии спина вдвое превышает ларморовскую частоту ω_L . Это связано с аномальным значением спинового гиромагнитного отношения γ , модуль которого в два раза больше, чем его орбитальный аналог $e/2m$.

Прецессию спина в магнитном поле можно использовать для управления его состоянием. Ограничим время действия поля интервалом τ таким, что $\omega_L \tau = \pi/2$. Тогда, как видно из (14.7), за время τ спин будет переходить из одного состояния вычислительного базиса в другое. Это значит, что, подавая импульс магнитного поля или позволяя электрону пролететь за время τ область, где такое поле создано, мы реализуем логическую операцию **X** (NOT).

Какое время потребуется электрону для инверсии спинового состояния? Это время зависит от величины управляющего поля. Оценим τ для достаточного большого, но вполне реального значения $B = 0.1$ Тл. В этом случае

$$\tau = \frac{\pi m}{Be} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ с}. \quad (14.10)$$

Таким образом, время цикла здесь не превышает наносекунды.

Помимо квантового элемента **X** для нашего простейшего кубита можно реализовать и другие логические операции. Попробуем подействовать на спин статическим магнитным полем, направленным под углом 45° к осям x и z . В этом случае гамильтониан системы будет иметь вид:

$$H = -\frac{\hbar \gamma B}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right], \quad (14.11)$$

где B – модуль вектора поля. Решая укороченное уравнение Паули с гамильтонианом (14.11), мы получим:

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\alpha(0)\cos\omega_L t + i\alpha(0) + \beta(0)\sin\omega_L t \\ \sqrt{2}\beta(0)\cos\omega_L t + i\alpha(0) - \beta(0)\sin\omega_L t \end{pmatrix}. \quad (14.12)$$

Возьмем в качестве начального состояния χ_{\uparrow} , т. е. положим $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$. Тогда через время $\tau = \pi/(2\omega_L)$ спинор (14.12) будет иметь вид:

$$\chi(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.13)$$

Выбрав на роль начального второе базисное состояние χ_{\downarrow} , для момента времени τ получим:

$$\chi(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (14.14)$$

Но эти две волновые функции отличаются от суперпозиций (7.9) лишь несущественным фазовым множителем $\exp(i\pi/2)$. Это значит, что магнитное поле, направленное вдоль биссектрисы угла между осями x и z , может действовать как логический элемент Адамара \mathbf{H} .

В разделе 7 отмечалось, что двукратное применение элемента Адамара, вопреки ожиданию, не превращает кубиты χ_{\uparrow} , χ_{\downarrow} друг в друга, а возвращает их в исходные состояния. Теперь мы готовы понять это на физическом уровне. Как и при реализации логического элемента \mathbf{X} , магнитное поле вызывает прецессию спина вокруг вектора поля. Поскольку поле в случае элемента \mathbf{H} направлено по биссектрисе координатного угла, прецессируя, спин будет описывать конус с углом раствора 90° , заключенный между осями x и z . Если время прецессии τ взять равным половине ее периода $T = 2\pi/(2\omega_L)$, то спин, первоначально направленный вдоль оси z , опишет половину конуса и ляжет вдоль оси x . Именно это состояние и описывается спинором (14.13), который является собственной функцией оператора \hat{s}_x . Повторное применение элемента Адамара означает включение магнитного поля еще на полпериода. В результате спин, описав вторую половину конуса, вернется в исходное состояние χ_{\uparrow} . Такая несложная физика стоит за соотношением $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$.

14.2. Спин в магнитном поле

Рассмотренная выше физическая модель кубита обладает серьезным недостатком – в отсутствие внешнего магнитного поля спиновые состояния χ_{\uparrow} , χ_{\downarrow} и любые их суперпозиции имеют одинаковые энергии. Такое вырождение крайне нежелательно, поскольку оно делает состояния χ_{\uparrow} и χ_{\downarrow} , равно как и все остальные, неустойчивыми по отношению к сколь угодно слабым внешним воздействиям. Избавиться от этого недостатка можно, поместив спин в статическое магнитное поле, которое снимает вырождение. Именно так и поступают на практике, используя в качестве кубитов ядерные или электронные спины.

Направим однородное статическое поле \mathbf{B}_0 по оси z . Тогда укороченное уравнение Паули будет иметь вид:

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\gamma B_0 \hat{s}_z \chi. \quad (14.15)$$

Подставляя сюда оператор \hat{s}_z в виде (3.3), для компонент спинора получим:

$$i \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\omega_L \alpha, \quad i \frac{\partial \beta}{\partial t} = \omega_L \beta, \quad (14.16)$$

где $\omega_L = \gamma B_0/2$. Решая уравнения (14.16), легко увидеть, что волновые функции стационарных состояний спина выглядят следующим образом:

$$\chi_{\uparrow}(t) = \begin{pmatrix} \exp(i\omega_L t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-i\omega_L t) \end{pmatrix}, \quad (14.17)$$

а отвечающие им собственные числа гамильтониана (уровни энергии) равны

$$E_{\uparrow} = E_0 = -\hbar\omega_L, \quad E_{\downarrow} = E_1 = \hbar\omega_L. \quad (14.18)$$

Как и ожидалось, вырожденный по спину уровень расщепился на два подуровня, которые разделены энергетическим интервалом $2\hbar\omega_L$, пропорциональным внешнему магнитному полю.

Наиболее естественный способ управлять состоянием такого кубита состоит в том, чтобы облучать его электромагнитной волной с частотой, отвечающей правилу Бора $\omega = (E_1 - E_0)/\hbar$. Подадим на кубит волну, у которой

вектор \mathbf{B} направлен вдоль оси x . Уравнение Паули в этом случае будет иметь вид:

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\gamma(B_0 \hat{s}_z + B(t) \hat{s}_x) \chi, \quad B(t) = B_0 \cos \omega t. \quad (14.19)$$

Соответственно временная эволюция компонент спинора $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ будет описываться уравнениями

$$i \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\omega_L \alpha - \Omega \cos(\omega t) \beta, \quad (14.20)$$

$$i \frac{\partial \beta}{\partial t} = \omega_L \beta - \Omega \cos(\omega t) \alpha,$$

где параметр Ω имеет размерность частоты и пропорционален амплитуде переменного поля: $\Omega = \gamma B_0 / 2$.

Попробуем найти решение системы (14.20), взяв искомый спинор в виде разложения по собственным функциям (14.17):

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = c_0(t) \begin{pmatrix} \exp(i\omega_L t) \\ 0 \end{pmatrix} + c_1(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-i\omega_L t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \exp(i\omega_L t) \\ c_1 \exp(-i\omega_L t) \end{pmatrix}. \quad (14.21)$$

Подставляя (14.21) в (14.20), получим:

$$i \frac{\partial c_0(t)}{\partial t} = -\Omega \cos(\omega t) \exp(-i2\omega_L t) c_1(t), \quad (14.22)$$

$$i \frac{\partial c_1(t)}{\partial t} = -\Omega \cos(\omega t) \exp(i2\omega_L t) c_0(t).$$

Воспользуемся формулой Эйлера $2\cos x = \exp(ix) + \exp(-ix)$ и возьмем частоту внешнего поля ω равной $2\omega_L$. Тогда система (14.22) примет вид:

$$i \frac{\partial c_0(t)}{\partial t} = -\frac{\Omega}{2} [1 + \exp(-i2\omega t)] c_1(t), \quad (14.23)$$

$$i \frac{\partial c_1(t)}{\partial t} = -\frac{\Omega}{2} [1 + \exp(i2\omega t)] c_0(t).$$

Учтем далее тот факт, что состояние спина под действием переменного поля эволюционирует достаточно медленно (если, конечно, амплитуда поля B_+ не слишком велика). Это значит, что характерное время, за которое происходит заметное изменение усредненных по периоду внешнего поля амплитуд $c_0(t)$ и $c_1(t)$, много больше этого периода. В такой ситуации можно пренебречь вторыми – «быстрыми» – слагаемыми в квадратных скобках правых частей уравнений (14.23), т. е. заменить эти уравнения приближенными:

$$i \frac{\partial c_0(t)}{\partial t} = -\frac{\Omega}{2} c_1(t), \quad i \frac{\partial c_1(t)}{\partial t} = -\frac{\Omega}{2} c_0(t). \quad (14.24)$$

Заметим, что подобная аппроксимация широко используется в самых разных областях физики и техники; иногда ее называют методом медленно меняющихся амплитуд.

Система уравнений (14.24) легко решается. Возьмем в качестве исходного состояние вычислительного базиса χ_{\uparrow} , т. е. примем начальные условия $c_0(0) = 1$, $c_1(0) = 0$. Тогда решение (14.24) будет иметь вид:

$$c_0(t) = \cos\left(\frac{\Omega}{2} t\right), \quad c_1(t) = i \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right). \quad (14.25)$$

Обращаясь к (14.21), легко записать отвечающий этому решению спинор:

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Omega}{2} t\right) \exp(i\omega_L t) \\ i \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right) \exp(-i\omega_L t) \end{pmatrix}. \quad (14.26)$$

Мы пришли к замечательному физическому результату: под действием переменного поля резонансной частоты $\omega = 2\omega_L$ вероятности обнаружить кубит в состояниях $|0\rangle$ и $|1\rangle$ периодически меняются во времени:

$$w_0 = w_{\uparrow} = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2} t\right) = \frac{1 + \cos\Omega t}{2}, \quad (14.27)$$

$$w_1 = w_{\downarrow} = \sin^2\left(\frac{\Omega}{2} t\right) = \frac{1 - \cos\Omega t}{2}.$$

Поскольку энергии этих состояний различны, временная эволюция вероятностей w_0 и w_1 означает обмен энергией между внешним полем и кубитом. Такая периодическая перекачка энергии очень похожа на биения, возникающие при взаимодействии двух классических осцилляторов с одинаковыми частотами. В квантовой механике этот эффект принято называть осцилляциями Раби. Осцилляции Раби можно эффективно использовать для управления состоянием кубита.

Подадим на кубит в состоянии $|0\rangle$ импульс переменного поля длительностью $\tau = \pi/\Omega$, так называемый π -импульс. В результате, как видно из (14.26), кубит окажется в состоянии $|1\rangle$. Такое воздействие, очевидно, реализует квантовый логический элемент **X** (NOT). Если уменьшить длительность импульса вдвое, т. е. подать $\pi/2$ -импульс, кубит перейдет в состояние, находящееся на экваторе сферы Блоха. В этом состоянии $w_\uparrow = w_\downarrow = 1/2$. Так можно получить физическую реализацию квантового элемента Адамара.

Заметим, что фазы компонент кубита общего вида (14.21) линейно зависят от времени. Линейной функцией времени оказывается и относительная фаза $\omega_L t - (-\omega_L t) = 2\omega_L t$. Таким образом, временная эволюция состояния кубита в отсутствие переменных внешних полей может играть роль квантового логического элемента сдвига фазы Φ .

14.3. Ридберговский атом в резонаторе

Один из наиболее интересных способов реализации кубита заключается в использовании высоковозбужденных состояний атомов щелочных металлов. Эти атомы имеют один валентный электрон, движущийся в кулоновском поле ядра и электронов полностью заполненных внутренних оболочек. Если перевести валентный электрон в состояние с $n \gg 1$, $l = n - 1$, где n и l – главное и орбитальное квантовые числа, то его волновая функция $\psi_{nml}(r, t)$ будет локализована вокруг классической орбиты частицы. В области же ионного остова, т. е. там, где располагается ядро и электроны внутренних оболочек, значения $\psi_{nml}(r, t)$ будут практически равны нулю. Известно, что суммарная плотность заряда, создаваемого электронами полностью заполненных оболочек, обладает сферической симметрией. Потенциал распределенного заряда с такой симметрией вне области его локализации совпадает с потенциалом соответствующего точечного заряда. Отсюда следует, что валентный

электрон, находящийся в сильно возбужденном состоянии и движущийся очень далеко от ядра, воспринимает ионный остов как точечный заряд величиной $+e$. А это значит, что энергетические спектры атомов щелочных металлов в области высоковозбужденных состояний, т. е. энергий, близких к порогу ионизации, должны описываться формулой Бора:

$$E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2n^2}. \quad (14.28)$$

Такие атомы называют ридберговскими. На практике работают с ридберговскими атомами, у которых главное квантовое число равно примерно 50.

Эффект «отжатия» волновых функций от ядра наиболее сильно выражен в тех случаях, когда наряду с n большим является и квантовое число l . При $l = n - 1$ электрон имеет максимальный из всех возможных орбитальный момент, и его волновая функция воспроизводит классическое круговое движение по боровской орбите, конечно, в той мере, в которой это допускает квантовая механика. Атомы в подобных состояниях называют циркулярными ридберговскими. Циркулярный ридберговский атом представляет собой гигантскую, по атомным масштабам, антенну в том смысле, что он намного сильнее взаимодействует с электромагнитным излучением, чем обычные атомы. На языке квантовой механики это звучит так: матричные элементы оператора электрического дипольного момента $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ в случае циркулярного ридберговского атома на несколько порядков больше по модулю, чем их аналоги для слабо возбужденных состояний.

Кубит на основе циркулярного ридберговского атома строится следующим образом. На роль состояния $|0\rangle$ берут боровскую орбиталь с $n = 50$, которую в этом случае обозначают $|g\rangle$ (ground state), а в качестве второго состояния вычислительного базиса используют орбиталь с $n = 51$. Ей присваивают обозначение $|e\rangle$ (excited state). Пересчитанная в частоту разность энергий этих состояний оказывается чуть большей 51 ГГц, т. е. попадает в диапазон миллиметровых волн. Для выполнения логических операций над атомным кубитом используется электромагнитное излучение, создаваемое в высокочастотном резонаторе. Здесь применяются открытые резонаторы (резонаторы Фабри-Перо), с зеркалами из сверхпроводящего ниобия. Их доброт-

ность превышает 10^9 . Поскольку резонансная частота имеет порядок 10^{11} , время жизни фотона τ_r в таком резонаторе может достигать долей секунды.

Эксперименты, как правило, проводятся при температурах не выше 1 К. Среднее число тепловых (планковских) фотонов $\bar{n}(\omega)$ резонансной частоты при таких температурах оказывается много меньшим единицы. В этом легко убедиться, обращаясь к распределению Бозе-Эйнштейна, записанному с учетом того факта, что химический потенциал фотонов равен нулю:

$$\bar{n}(\omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (14.29)$$

Например, для типичного значения $T = 0.8$ К и $\omega = 2\pi \cdot 51 \cdot 10^9$ формула (14.29) дает $\bar{n}(\omega) \approx 0.05$. Реально, однако, в резонатор через открытые боковые стенки проникает излучение извне, которое имеет более высокую температуру. Поэтому на практике среднее число фотонов частоты ω оказывается существенно большим: $\bar{n}(\omega) \sim 1$. Если мы хотим контролируемым образом изменять состояние атомного кубита, то надо, чтобы поле в резонаторе находилось в определенном квантовом состоянии. Его можно приготовить, только избавившись в максимально возможной степени от тепловых фотонов. Чтобы уменьшить их число, через резонатор пропускают группу атомов, находящихся в «основном» состоянии $|g\rangle$. Они поглощают фотоны частоты ω и охлаждают поле до уровня $\bar{n}(\omega) \sim 0.1$, который считается приемлемым.

Итак, пусть в резонаторе возбуждено электромагнитное поле, энергия которого имеет определенное значение, равное $\hbar\omega(k + 1/2)$. Это значит, что резонатор содержит k фотонов. Пропустим через такой резонатор ридберговский атом в состоянии $|g\rangle$. Пролетая через резонатор, он будет взаимодействовать с электромагнитным полем, частота которого удовлетворяет правилу Бора $\omega = (E_e - E_g)/\hbar$. Как мы видели, такое резонансное воздействие поля на кубит приводит к осцилляциям Раби, т. е. к периодическому обмену энергией между полем и кубитом с частотой Ω . Если время пролета атома через активную область резонатора составит π/Ω , то на выходе атом будет находиться в состоянии $|e\rangle$, а поле, потеряв один фотон, перейдет в состояние с энергией $\hbar\omega(k - 1/2)$. Таким способом, очевидно, можно реализовать квантовую логическую операцию **X** (NOT).

Уменьшим далее время взаимодействия поля и кубита вдвое. Теперь под действием поля кубит перейдет не на противоположный полюс сферы Блоха, а на ее экватор, и среднее значение его энергии составит $(E_e - E_g)/2$. Это значит, что $\pi/2$ -импульс превратит базисное состояние в суперпозицию вида

$$\frac{|g\rangle + \exp(i\varphi)|e\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (14.30)$$

т. е. выполнит функцию логического элемента Адамара \mathbf{H} и элемента сдвига фазы $\mathbf{\Phi}(\varphi)$.

Еще более интересным является то, что в результате взаимодействия с атомом поле также «остановится на полпути» между состояниями с определенной энергией. Его средняя энергия станет равной $\hbar\omega k$, а волновая функция превратится в суперпозицию

$$\frac{|k-1\rangle + \exp(i\chi)|k\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (14.31)$$

Но атом и электромагнитное поле резонатора, взаимодействующие друг с другом, образуют замкнутую систему. При временной эволюции волновой функции этой системы ее полная энергия должна сохраняться. Это значит, что, измеряя полную энергию системы в любой момент времени, мы будем получать либо значение $E_g + \hbar\omega(k + 1/2)$, если атом первоначально находился в состоянии $|g\rangle$, либо $E_g + \hbar\omega(k + 3/2)$, если атом на входе пребывал в состоянии $|e\rangle$. Таким образом, в результате взаимодействия атома и поля возникает взаимная обусловленность их состояний. Математически она выражается в том, что волновая функция системы «атом + поле» имеет вид

$$\frac{|g, k\rangle + \exp(i\phi)|e, k-1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad \frac{|e, k\rangle + \exp(i\phi)|g, k+1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (14.32)$$

По причине, указанной выше, обе компоненты каждой из этих суперпозиций отвечают одной и той же энергии, а два других состояния вычислительного базиса (с большей и меньшей энергиями) в (14.32) не входят.

Суперпозиции (14.32) очень похожи на состояния Белла (13.3). Они отличаются от белловских состояний только относительными фазами, которые не

вливают на вероятности обнаружения системы в одной из двух возможных конфигураций. Следовательно, взаимодействие в виде $\pi/2$ -импульса можно использовать для генерации белловских состояний атома и квантованного электромагнитного поля. Если в исходном состоянии имеется всего один фотон ($k = 1$), а в роли атомной орбитали выступает $|g\rangle$, то результатом такого взаимодействия будет белловское состояние атома и фотона.

15. ПЕРЕПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Волновые функции (14.32), как и (13.3), обладают замечательным свойством: им отвечают двухчастичные квантовые состояния, для которых результат первичного измерения, произведенного над одной из частиц, максимально неопределен («50 на 50»), но в которых состояния частиц предельно жестко скоррелированы. Это значит, что по результату измерения, выполненного над одной из частиц, однозначно предсказывается результат измерения состояния другой. В случае суперпозиции (14.32), например, если измерение состояния атома, покинувшего резонатор, показало, что он находится в состоянии $|g\rangle$, то в резонаторе с вероятностью 1 будет находиться один фотон. Наоборот, если атом – по результатам измерения – вылетает в состоянии $|e\rangle$, то последующее измерение числа фотонов в резонаторе даст $k = 0$.

Подобные квантовые состояния можно построить не только для двух, но и для трех, четырех и любого другого, произвольно большого числа частиц. Так, очень важную роль в квантовой информатике играют скоррелированные состояния трех частиц, которым отвечают волновые функции вида

$$\frac{|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3}{\sqrt{2}}; \quad (15.1)$$

их называют состояниями Гринбергера-Хорна-Цайлингера. В этих состояниях измерение, произведенное над одной из частиц, однозначно фиксирует результаты измерений над двумя другими.

Квантовые состояния типа (13.3), (14.32), (15.1) и их многочастичные аналоги принято называть перепутанными или запутанными состояниями, от английского “entangled states”. В принципе, перепутанные состояния не есть что-то совсем новое для квантовой механики или нечто, специфическое толь-

ко для квантовой информатики. Например, второй и четвертой волновым функциям (13.3), если они записаны для двух одинаковых (т. е. неразличимых) фермионов, отвечают хорошо известные триплетное и синглетное состояния. Принципиально важным для развития квантовой информатики явилось не открытие перепутанных состояний как таковых, а осознание следующих трех важнейших фактов. Именно,

1) перепутанность состояния двух и более частиц сохраняется при удалении этих частиц друг от друга на сколь угодно большие, в том числе и макроскопические расстояния,

2) перепутанность есть универсальная характеристика любого многочастичного квантового состояния, которая не зависит от формы записи его волновой функции, т. е. от выбранного квантовомеханического представления,

3) перепутанность представляет собой чисто квантовый и очень мощный ресурс, который можно эффективно использовать для обработки и передачи информации.

Первый из этих фактов не требует каких-либо особых комментариев, ибо он лежит в русле основных представлений квантовой механики. Отметим лишь, что сохранение на достаточно больших временных и пространственных интервалах определенного квантового состояния двух или более микрочастиц требует полной изоляции этих частиц от внешнего окружения, а это представляет собой, как правило, исключительно трудную в практическом плане задачу. Мы еще коснемся этого вопроса в следующих параграфах.

Второй факт мы проиллюстрируем следующим конкретным примером. Рассмотрим перепутанное состояние двух спинов (кубитов). Выберем в качестве оси квантования ось z , а двухчастичную волновую функцию возьмем в виде состояния Белла

$$\beta_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{\uparrow\downarrow} - \chi_{\downarrow\uparrow}) \quad (15.2)$$

или, в других обозначениях,

$$\beta_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (15.3)$$

Попробуем выяснить, сохранится ли жесткая корреляция ориентаций спинов, если измерять их проекции не на ось z , а на другую ось, скажем, на ось x . Для этого разложим суперпозицию (15.2), (15.3) по собственным функциям

оператора \hat{s}_x , который отличается от матрицы логического элемента \mathbf{X} лишь численным множителем. Эти функции, как известно, имеют вид:

$$\chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\uparrow + \chi_\downarrow), \quad \chi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\uparrow - \chi_\downarrow), \quad (15.4)$$

или, в дираковских обозначениях,

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (15.5)$$

Первой из суперпозиций (15.4) отвечает собственное число $s_x = \hbar/2$, второй – $s_x = -\hbar/2$. Обращая соотношения (15.5) и подставляя получающиеся таким способом выражения для $|0\rangle, |1\rangle$ в исходную волновую функцию, найдем:

$$\beta_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle|+\rangle - |+\rangle|-\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle - |+-\rangle). \quad (15.6)$$

Из этой формулы хорошо видно, что результаты измерения проекций спинов на ось x взаимообусловлены столь же однозначно, как и результаты измерения проекций на ось z . Действительно, если измерение s_x первого спина дает $\hbar/2$, то последующее измерение проекции второго достоверно ведет к результату $s_x = -\hbar/2$, и наоборот. Таким образом, замена оси квантования и, как следствие, состояний вычислительного базиса не влияет на основную корреляционную характеристику белловского состояния β_{11} – это состояние остается перепутанным.

Любая ли суперпозиция многочастичных базисных состояний является перепутанным состоянием или, как говорят, обладает ненулевой перепутанностью? Оказывается, нет. Рассмотрим волновую функцию следующего вида:

$$\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle). \quad (15.7)$$

В этом состоянии, в отличие от (15.6), ориентации спинов двух частиц являются независимыми. Убедиться в отсутствии корреляции значений s_z для двух частиц легко – достаточно лишь найти вероятности обнаружения в эксперименте четырех возможных спиновых конфигураций. В состоянии (15.7) все эти вероятности равны друг другу: $w_{\uparrow\uparrow} = w_{\uparrow\downarrow} = w_{\downarrow\uparrow} = w_{\downarrow\downarrow} = 1/4$. Это

значит, что если при измерении s_z первой частицы было получено, скажем, значение $\hbar/2$, то это никак не влияет на результат измерения проекции второго спина – оба исхода, $s_z = \hbar/2$ и $s_z = -\hbar/2$, остаются равновероятными.

Такие многочастичные состояния, в которых частицы (кубиты) ведут себя как независимые квантовые объекты, называются сепарабельными. В сепарабельных состояниях перепутанность полностью отсутствует. Для любого сепарабельного состояния существует представление, в котором соответствующая волновая функция записывается как произведение одночастичных волновых функций. В случае суперпозиции (15.7) это представление реализуют состояния (15.5). Как нетрудно видеть,

$$\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) = |+\rangle|-\rangle. \quad (15.8)$$

Другими словами, суперпозиция (15.7) есть как волновая функция двух независимых спинов, первый из которых направлен вдоль оси x , т. е. описывается спинором $|+\rangle$, а второй ориентирован в противоположном направлении.

16. ПЕРЕПУТАННОСТЬ КАК ИНФОРМАЦИОННЫЙ РЕСУРС

Нам осталось обсудить третий факт из перечисленных в предыдущем параграфе, а именно рассмотреть перепутанность как информационный ресурс. Пусть у нас есть n кубитов, образующих квантовый регистр. Состояния вычислительного базиса такого регистра имеют вид

$$|000\dots 0\rangle, \quad |100\dots 0\rangle, \quad |010\dots 0\rangle, \quad \dots, \quad |111\dots 1\rangle, \quad (16.1)$$

и их общее число, как легко сообразить, равно 2^n . Произвольное квантовое состояние регистра характеризуется волновой функцией χ , которую можно разложить по ортогональному базису (16.1):

$$\chi = A_{000\dots 0}|000\dots 0\rangle + A_{100\dots 0}|100\dots 0\rangle + \dots + A_{111\dots 1}|111\dots 1\rangle. \quad (16.2)$$

Задание функции χ , очевидно, эквивалентно фиксации 2^n комплексных амплитуд $A_{abc\dots n}$. Эта фиксация есть не что иное как выбор состояния нашего регистра, т. е. запись квантовой информации в нем. Будем задавать каждую из амплитуд в (16.2) с конечной точностью, считая, что на практике существ-

вует ограниченное число различных градаций значений $A_{abc\dots n}$. Обозначим это число через k . Если, например, амплитуды фиксируются с разрешением в 1 байт, то $k = 256$. Сколько всего существует различных наборов дискретных значений 2^n амплитуд $A_{abc\dots n}$? Общее число таких наборов, как легко видеть, равно

$$\underbrace{k \cdot k \cdot k \dots k}_{2^n} = k^{2^n}. \quad (16.3)$$

Если учесть условие нормировки и тот факт, что общая фаза волновой функции не существенна, число различных состояний квантового регистра окажется на два меньше чем (16.3), однако при реалистических значениях k и n эту разницу можно игнорировать.

Итак, квантовый регистр может пребывать в одном из гигантского числа различных состояний и, следовательно, хранить очень большой объем информации. В нашем случае этот объем (в битах) равен $2^n \log_2 k$. Сравним эту оценку с ее классическим аналогом. Число разных состояний классического регистра, построенного из n бистабильных элементов, составляет 2^n . Соответственно, в таком регистре можно записать не более n битов информации. Это значит, что даже при небольших n , скажем, для $n \sim 10$, информационная емкость квантового регистра на порядки превосходит емкость регистра классического. Еще более важно то, что с ростом разрядности эти емкости меняются по разным законам. Если емкость классического регистра в битах просто пропорциональна n , то емкость квантового регистра растет с n экспоненциально.

Попробуем выяснить, за счет каких состояний квантового регистра реализуется это огромное информационное преимущество. Прежде всего, заметим, что среди состояний квантового регистра есть такие, которые воспроизводят состояния классического регистра и полностью исчерпывают их. Мы имеем в виду, конечно, состояния вычислительного базиса (16.1). Чем замечательны эти состояния в плане квантовых корреляционных эффектов? Очевидно тем, что квантовые корреляции в поведении кубитов, образующих регистр, здесь полностью отсутствуют. Действительно, многочастичные волновые функции (16.1) есть произведения однокубитовых векторов состояний, так что измерение, произведенное над одним или несколькими кубитами, никак не отражается на состояниях остальных элементов квантового регистра. Ограничиваясь только состояниями (16.1), т. е. не используя суперпозиций,

которые из них можно построить, мы в силах записать лишь n битов информации. Ясно, что обсуждающийся гигантский информационный ресурс прямого отношения к этим состояниям не имеет.

Все остальные состояния квантового регистра являются суперпозициями базисных функций (16.1). Суперпозиции составляют подавляющее большинство всех возможных состояний, и число их экспоненциально растет с ростом n . Суперпозиции различного типа могут обладать совершенно разными корреляционными свойствами. Среди них есть те, что описывают сепарабельные состояния. Примером может служить функция

$$\frac{|000\dots 0\rangle + |100\dots 0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (16.4)$$

которая, как легко видеть, равна произведению однокубитовой суперпозиции и одночастичных состояний вычислительного базиса. Отвечающее ей квантовое состояние, очевидно, не является перепутанным. Волновая функция вида

$$\frac{|000\dots 0\rangle + |110\dots 0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (16.5)$$

описывает уже перепутанное состояние, но квантовые корреляции распространяются в нем лишь на первый и второй кубиты. Наконец, среди всех возможных суперпозиций есть n -кубитовое состояние типа Гринбергера-Хорна-Цайлингера (ГЦК)

$$\frac{|000\dots 0\rangle + |111\dots 1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (16.6)$$

Перепутанность достигает в этом состоянии максимально возможной степени в том смысле, что квантовые корреляции являются предельно широкими, т. е. охватывают все n кубитов, и предельно сильными – измерение состояния одного из кубитов однозначно фиксирует состояния всех остальных.

Кроме перечисленных, существует огромное число суперпозиций других типов. Интуитивно понятно, что те из них, для которых все коэффициенты в разложении (16.2) отличны от нуля или не связаны друг с другом простыми соотношениями как, например, у функций (16.4), (16.5) и (16.6), образуют абсолютное большинство. Опять-таки на уровне интуиции легко принять, что из-за отсутствия регулярных соотношений между амплитудами $A_{abc\dots n}$ эти су-

перпозиции не будут, как правило, распадаться на произведения волновых функций отдельных кубитов, т. е. описывать сепарабельные состояния. А это значит, что основной массе суперпозиций вида (16.2) отвечают перепутанные состояния. С этими состояниями или, более широко, с самим фактом существования перепутанности и связан огромный информационный ресурс, который выгодно отличает квантовые системы от классических.

Перепутанность как фундаментальная характеристика состояний квантовых систем имеет множество сторон, среди которых важное место занимают информационные аспекты. Некоторые из них на сегодня хорошо изучены, причем не только теоретически, но и экспериментально. Одним из наиболее поразительных предсказаний квантовой механики систем многих частиц является наличие корреляций в поведении частиц даже в тех случаях, когда они разнесены в пространстве и прямое взаимодействие между ними отсутствует. Такая квантовая нелокальность имеет прямое отношение к перепутанности: она проявляется лишь тогда, когда система находится в перепутанном состоянии. Перепутанность занимает ключевое место в квантовой теории передачи данных. Мы имеем здесь в виду квантовую телепортацию – очень яркий пример проявления и практического применения квантовой нелокальности.

17. КВАНТОВАЯ ТЕЛЕПОРТАЦИЯ

Под телепортацией в квантовой механике понимают перенос информации о состоянии квантовой системы без перемещения в пространстве самой системы, т. е. частиц, из которых она состоит. Передача информации осуществляется путем использования фактора перепутанности или, более конкретно, за счет многочастичных квантовых корреляций, характерных для перепутанных состояний. Предполагается, что телепортируемое состояние является априори неизвестным и на передающем конце не производится никаких измерений с целью определения этого состояния (в противном случае информацию об этом состоянии можно было бы передать обычными классическими методами). Чуть позже мы опишем способ или, как принято говорить, протокол, позволяющий осуществить настоящую квантовую телепортацию; он и многочисленные его модификации уже реализованы на практике.

Пока же проиллюстрируем основные черты этого удивительного явления на примере очень простой, почти игрушечной схемы.

17.1. Телепортация классических битов

Обратимся к двум персонажам, обозначаемым обычно буквами А (Алиса) и В (Боб), которые намерены обменяться сообщением, закодированным бинарным кодом. Сообщение, очевидно, представляет собой цепочку нулей и единиц типа 110100010... . Предположим, что в распоряжении Алисы и Боба имеется генератор, который создает пары частиц-кубитов в определенном белловском состоянии, например, в состоянии

$$\beta_{01} = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (17.1)$$

(ЭПР пары) и рассылает их обоим корреспондентам. Вся система устроена таким образом, что один из кубитов пары всегда получает Алиса, а другой – Боб. Очень важно, что по дороге кубиты не вступают ни в какие взаимодействия, которые могли бы изменить (разрушить) их общее квантовое состояние. Поэтому априорные вероятности обнаружить каждый из кубитов в одном из двух альтернативных состояний $|0\rangle$, $|1\rangle$ равны $\frac{1}{2}$.

Чтобы передать свое сообщение, Алиса поступает следующим образом. Она производит измерение над кубитом, полученным от генератора, и запоминает результат. Пусть, например, это измерение дало 0, т. е. кубит оказался в состоянии $|0\rangle$. Алиса понимает, что, если теперь Боб произведет измерение над своей половиной ЭПР пары, то он с достоверностью получит 1 – тот символ, с которого начинается пересылаемое сообщение 110100010... . Она связывается с Бобом по обычному каналу связи, скажем, по телефону и говорит, что 1) он уже может измерять состояние своего кубита и 2) результат, который он получит, будет правильным.

Продолжая в том же духе, Алиса измеряет состояние следующего кубита, посланного ей генератором, и на этот раз получает 1. Соответственно Боб, выполняя свое измерение, в данном случае наверняка получит 0. Она звонит ему и говорит, что второй полученный им кубит несет не ту информацию, которую она намеревалась послать. Поэтому после измерения Бобу следует скорректировать свой результат, а именно заменить полученный им 0 на 1.

Конечно, такая корректировка результатов одиночных телепортационных актов – вещь неудобная. Гораздо проще закодировать корректирующие сигналы в виде нулей и единиц и передать их последовательность целиком после окончания всех измерений. Успешная реализация этой идеи предполагает, что Алиса и Боб сохраняют результаты всех своих измерений, т. е. записывают их. Соответствующие записи, очевидно, представляют собой бинарные цепочки той же длины, что и передаваемое сообщение. Имея исходное сообщение и результаты своих измерений, Алиса может сформировать корректирующую последовательность и переслать ее Бобу обычным образом. Боб, получив эту цепочку, легко восстановит передаваемое сообщение, используя результаты измерений, произведенных им над своими кубитами.

Посмотрим, как работает этот простейший протокол. Итак, Алиса хочет передать Бобу сообщение 110100010... . Измеряя свои кубиты («половинки» ЭПР пар), она получает, согласно законам квантовой механики, случайную последовательность, например, 010111001... . Зная, что Боб располагает другими половинами тех же белловских состояний, Алиса без труда находит цепочку, которую он получил в результате своих измерений: 101000110... . Имея эту цепочку, она формирует корректирующую последовательность (ключ к шифру), заранее договорившись с Бобом о том, что 0 в этой последовательности означает правильный результат («ничего не меняй»), а 1 – неверный («поменяй 0 на 1 или наоборот»). В нашем случае эта последовательность, как легко сообразить, имеет вид: 011100100... . Алиса передает ее Бобу, используя обычный канал связи – телефон, радио, интернет и т. п. Боб, получив эту информацию, восстанавливает исходное сообщение. Для этого он может использовать словесную логику, приведенную выше, или обратиться к формальным операциям. Дело в том, что при выбранной кодировке корректирующих операций (0 и 1) корректировка сводится к сложению по модулю два результата измерения и корректирующего сигнала. Поэтому передаваемое сообщение можно получить, просто складывая поразрядно (по модулю два) цепочку результатов Боба и корректирующую последовательность Алисы:

$$\begin{array}{r}
 101000110\dots \\
 011100100\dots \\
 \hline
 110100010\dots
 \end{array}
 \tag{17.2}$$

Результат, как и следовало ожидать, совпал с исходным сообщением. Квантовая телепортация состоялась.

Описанный способ передачи данных радикально отличается от всего, что было придумано в обычной технике связи. Самая важная особенность квантовой телепортации состоит в том, что этот процесс не требует обмена материальными объектами – частицами, квантами полей – между передающей и принимающей сторонами. Перенос информации здесь происходит исключительно за счет использования перепутанных состояний, создаваемых общим генератором, т. е. путем реализации квантового информационного ресурса. Эта черта позволяет сделать квантовый канал связи абсолютно секретным, конфиденциальным. Чем обеспечивается такая абсолютная защищенность?

Допустим, что любительница чужих секретов Е (ее называют Евой, по видимому, по созвучию имени Eve с глаголом eavesdrop – подслушивать) решила прочесть информацию, переносимую частицами, которые получает Боб. Это можно сделать, только произведя соответствующие измерения. Измерение наблюдаемых величин, как мы знаем, разрушает состояние частицы и требует, как правило, перехвата измерительным прибором самой частицы, например, фотона. Ситуация здесь принципиально отличается от той, которую мы имеем в макром мире, где регистрация электрических или оптических импульсов (подслушивание) возможна за счет отбора малой части энергии сигнала. Кроме того, и это не менее важно, до измерения, проведенного над своей половиной ЭПР пары Алисой, частица, адресованная Бобу, вообще «не знает», какую информацию несет: результаты 0 и 1 являются для нее равновероятными. Ясно поэтому, что, похищая частицу Боба и измеряя ее характеристики, Ева либо не получит никакой информации (если Алиса еще не успела сделать свое измерение), либо демаскирует себя, т. е. обнаружит факт подслушивания – ведь Боб, не получив свою частицу, сразу поймет, в чем дело. Так законы природы защищают квантовый канал связи.

17.2. Телепортация произвольного квантового состояния

Описанная выше схема является не только предельно простой, но и крайне малоэффективной – при каждом телепортационном акте передается только один классический бит. Фактически речь в предыдущем разделе идет

не столько о телепортации, сколько о квантовом кодировании: Алиса, проводя свои измерения, формирует набор случайных двоичных чисел, который Боб использует как ключ к шифру. Случайность набора гарантирует квантовая механика, а ключ, передаваемый по открытому каналу связи, идеален в том смысле, что сам по себе не несет никакой информации.

Настоящая квантовая телепортация – вещь значительно более сложная и много более эффективная. Это мощный инструмент транспортировки данных, который может обеспечить, в принципе, одновременную передачу огромных объемов информации. Мы имеем в виду телепортацию произвольного квантового состояния. Каждое такое состояние, как известно, требует для своего задания фиксации двух вещественных чисел (точки на сфере Блоха), в общем случае иррациональных. Поэтому даже один кубит обладает очень большой информационной емкостью. Если же обратиться к системе из нескольких кубитов, то эта емкость возрастает экспоненциально. Это значит, что, придумав способ телепортации произвольных квантовых состояний, можно создать каналы связи с огромной пропускной способностью.

Такой способ был изобретен в 1993 г. Ч. Беннетом, Ж. Brassаром, К. Крепо, Р. Иोजа, А. Пересом и У. Вуттерсом и впервые экспериментально реализован в 1997 г. группой А. Цайлингера, работавшего в университете Иннсбрука (Австрия). Рецепт телепортации основан на предположении, что у Алисы и Боба есть по одному кубиту, которые когда-то в прошлом взаимодействовали друг с другом и образовали ЭПР пару. Теперь кубиты разнесены в пространстве, каждый из них принадлежит своему владельцу, но они продолжают находиться в общем (двухчастичном) перепутанном состоянии. Задача заключается в том, чтобы передать от Алисы Бобу произвольное, не известное Алисе квантовое состояние ψ без прямого обмена кубитами, т. е. используя только обычный классический канал связи.

Запишем предназначенное для передачи квантовое состояние ψ в виде

$$\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (17.3)$$

а в качестве Белловской пары, которой располагают Алиса и Боб, возьмем две частицы в состоянии

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (17.4)$$

Алиса, таким образом, имеет два кубита – передаваемый и белловский – и может делать с ними любые квантовые и классические манипуляции. Ее цель – подвергнуть двухчастичное состояние своих кубитов такому преобразованию, чтобы кубит Боба превратился в ψ , т. е. чтобы Боб, после определенных операций со своим кубитом, получил передаваемое квантовое состояние.

Действия Алисы и Боба, позволяющие телепортировать произвольное квантовое состояние ψ , иллюстрирует схема, приведенная на рис. 17.1. Здесь

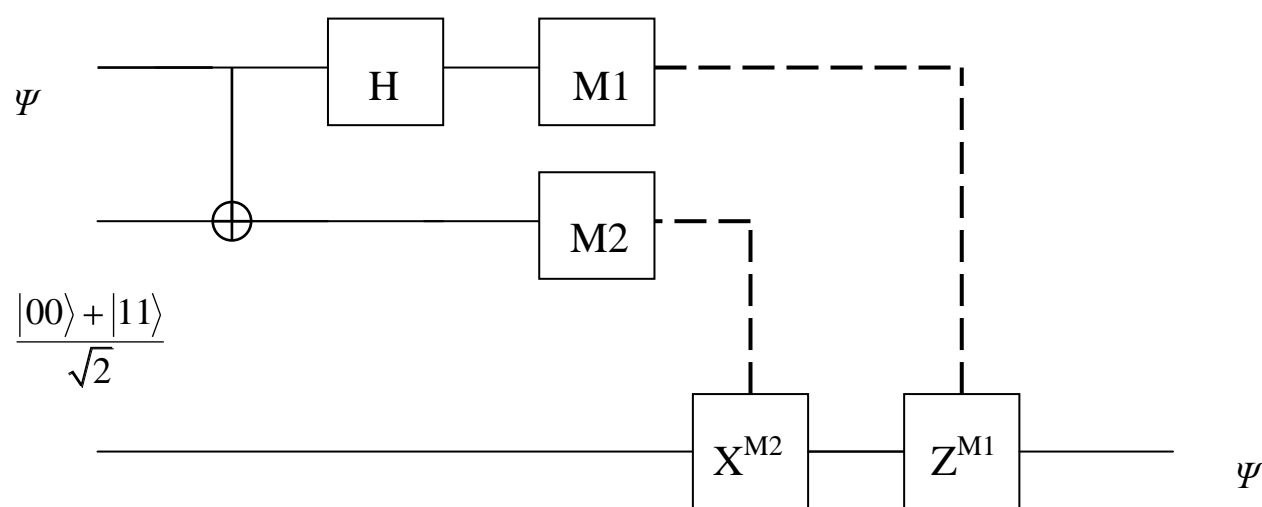


Рис. 17.1. Схема (протокол) телепортации произвольного квантового состояния.

верхняя и средняя входные линии изображают кубиты Алисы, а нижняя – кубит Боба. Блоки M1 и M2 – это макроскопические измерительные приборы, каждый из которых производит измерение над своим кубитом и выдает один из двух возможных результатов – 0 или 1. Штриховыми линиями изображен классический канал связи, по которому Алиса передает Бобу результаты этих измерений, т. е. пару двоичных символов (M1, M2), например, (1, 0). Квантовые логические элементы X^{M2} и Z^{M1} , через которые пропускает свой кубит Боб, устроены так, что их действие зависит от того, что прислала Алиса. Если, скажем, $M1 = 1$ и $M2 = 0$, то $X^{M2} = X^0 = I$ и $Z^{M1} = Z^1 = Z$. Другими словами, если от Алисы по классическому каналу связи получена единица, то соответствующий логический элемент работает согласно своему обозначению (X или Z), если же получен нуль, то этот элемент используется как тождественный, т. е. попросту игнорируется.

Посмотрим, как работает предложенная схема или, как принято говорить, протокол. На входе мы имеем трехкубитовое состояние, волновая функция которого записывается в виде:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha |0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta |1\rangle (|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha |00\rangle + \beta |10\rangle) |0\rangle + (\alpha |01\rangle + \beta |11\rangle) |1\rangle]. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Здесь во второй строке двухсимвольные скобки Дирака отвечают кубитам, принадлежащим Алисе, а односимвольные – кубиту, которым владеет Боб. Пропустим, согласно протоколу рис. 4, кубиты Алисы через элемент CNOT:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17.6)$$

В результате трехчастичное состояние (17.5) превратится в

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha |00\rangle + \beta |11\rangle) |0\rangle + (\alpha |01\rangle + \beta |10\rangle) |1\rangle]. \quad (17.7)$$

Перегруппируем далее слагаемые так, чтобы выделить верхний (первый) кубит Алисы, т. е. тот кубит, который нужно пропустить через элемент **H**:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha |0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta |1\rangle (|01\rangle + |10\rangle)]. \quad (17.8)$$

Действие элемента Адамара дает:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \frac{1}{2} [\alpha (|0\rangle + |1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) + \beta (|0\rangle - |1\rangle) (|01\rangle + |10\rangle)] \\ &= \frac{1}{2} [\alpha (|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle) + \beta (|001\rangle - |101\rangle + |010\rangle - |110\rangle)]. \end{aligned} \quad (17.9)$$

Это последняя квантовая логическая операция, выполняемая Алисой. Далее Алиса производит измерение своих кубитов, которое может дать один из четырех результатов: (0, 0), (0, 1), (1, 0) и (1, 1). Поскольку первоначально Алиса и Боб имели на двоих пару частиц в белловском состоянии, следует ожидать, что измерение, произведенное над кубитами Алисы, повлияет на состояние кубита Боба. Перепишем трехкубитовую волновую функцию (17.9) так, чтобы стало ясно, в какое квантовое состояние перейдет кубит Боба в каждом из перечисленных выше случаев. Для этого достаточно разбить слагаемые в (17.9) на группы, отвечающие определенным базисным состояниям кубитов Алисы:

$$\begin{aligned}
 |\psi_2\rangle = & \frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \frac{1}{2}|01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \\
 & + \frac{1}{2}|10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + \frac{1}{2}|11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle).
 \end{aligned}
 \tag{17.10}$$

Как видно, каждому из исходов отвечает определенная волновая функция кубита Боба. Если при измерении своих кубитов Алиса получила (0, 0), то кубит Боба оказывается в состоянии $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \psi$ – именно в том, которое предназначалось для передачи. Теперь Боб располагает передаваемым состоянием ψ . Это значит, что квантовая телепортация возможна, ибо есть протокол, который ее реализует. Телепортация происходит, правда, с вероятностью $(1/2)^2 = 0.25$, т. е. в одном случае из четырех.

Можно ли поднять эту вероятность до единицы, другими словами, можно ли организовать достоверную телепортацию квантового состояния? Да, можно. Обратим внимание на тот факт, что при любом результате измерений Алисы состояние кубита Боба, как видно из (17.10), фиксируется числами α и β . Значит, сами эти числа телепортируются со стопроцентной вероятностью, хотя в трех случаях из четырех они стоят не на тех местах и/или не с теми знаками. Действительно, если при измерении своих кубитов Алиса получила (1, 0), то кубит Боба перешел в состояние $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$, отличающееся от ψ знаком второго слагаемого, т. е. относительной фазой. Если же приборы Алисы дали (0, 1), то вместо ψ Боб получил состояние $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$, которое отличается от ψ перестановкой коэффициентов (инверсией). Наконец, если изме-

рения Алисы привели к результату (1, 1), то кубит Боба перешел в состояние $\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle$, отличающееся от ψ и фазой, и расстановкой коэффициентов.

Теперь ясно, что нужно делать, чтобы при любом исходе экспериментов Алисы кубит Боба переходил в «правильное» (телепортируемое) квантовое состояние. Очевидно, в каждом конкретном случае Алиса должна сообщать Бобу результаты своих измерений, а Боб, получив эту информацию, исправлять состояние своего кубита. Передачу корректирующей информации (наборов нулей и единиц) можно осуществлять по любому классическому каналу связи, а для корректировки состояния кубита на приемном конце использовать стандартные элементы однокубитовой логики.

Именно этот алгоритм и реализует схема рис. 17.1. Если на выходе своих измерителей Алиса получает (0, 0), элементы \mathbf{X}^{M_2} , \mathbf{Z}^{M_1} работают как тождественные ($\mathbf{X}^{M_2} = \mathbf{X}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{Z}^{M_1} = \mathbf{Z}^0 = \mathbf{I}$) и оставляют кубит Боба $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \psi$ неизменным. Если результат измерений Алисы выглядит как (0, 1), то необработанный кубит $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$ Боб пропускает последовательно через элементы $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}^0 = \mathbf{I}$, превращая его в телепортируемый кубит ψ :

$$\mathbf{IX} \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle \equiv \mathbf{IX} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (17.11)$$

Если эксперимент Алисы дал (1, 0), то Боб подвергает свой «полуфабрикат» $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ операциям $\mathbf{X}^0 = \mathbf{I}$ и $\mathbf{Z}^1 = \mathbf{Z}$, опять получая кубит ψ :

$$\mathbf{ZI} \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \equiv \mathbf{ZI} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (17.12)$$

Наконец, если при измерении своих кубитов Алиса получила (1, 1), кубит Боба $\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle$ обрабатывается «по полной программе» с тем, чтобы превратить его в $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \psi$:

$$\mathbf{ZX} \alpha|1\rangle - \beta|0\rangle \equiv \mathbf{ZX} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (17.13)$$

Итак, протокол Беннета-Брассара-Крепо-Иожа-Переса-Вуттерса позволяет достоверно телепортировать произвольное квантовое состояние, т. е. пересылать огромный объем информации, передавая лишь два классических

бита. За счет чего происходит это «чудо»? Ключевую роль здесь играет тот факт, что априори Алиса и Боб имеют две частицы в перепутанном состоянии. Это значит, что еще до начала передачи между Алисой и Бобом существует информационный контакт, который активизируется в процессе телепортации. Физика, лежащая в основе такого контакта – специфические корреляции в поведении двух частиц, находящихся в едином квантовом состоянии. Чтобы использовать этот контакт для передачи информации, необходимо вовлечь в круг скоррелированных частиц третью частицу, которая, находясь в произвольном неизвестном состоянии ψ , является его носителем. Именно с этой целью Алиса пропускает свой Белловский кубит и передаваемый кубит ψ через элемент CNOT, который, как мы видели (см. параграф 13), перепутывает входные состояния. После этой операции кубит ψ оказывается перепутанным с кубитом Алисы, а значит и с кубитом Боба, ибо последние два перепутаны друг с другом. Все, что делается в дальнейшем – это информационная реализация этой перепутанности, т. е. такая обработка кубита Боба, которая превращает его состояние в состояние ψ . Возможность такого превращения показывает, насколько сильными являются квантовые корреляции: двойное перепутывание – исходное плюс сделанное Алисой – позволяет телепортировать всю информацию, заключенную в неизвестном состоянии ψ , т. е. однозначно восстановить ее на приемном конце, получив всего два классических бита.

Позволяя передавать (телепортировать) любые квантовые состояния, схема рис. 17.1 в то же время не дает возможности копировать их. Действительно, манипуляции Алисы на передающем конце включают в себя измерения состояний кубитов. Эти измерения, очевидно, необратимы, и, выполняя их, Алиса разрушает исходное состояние ψ . Поэтому как до, так и после телепортации носителем ψ является только одна частица. Меняется лишь ее владелец: до телепортации частица в состоянии ψ принадлежит Алисе, после телепортации – Бобу. Так в данном случае работает теорема о невозможности копирования кубита.

Второй важный момент состоит в том, что квантовая телепортация неосуществима без использования классического канала связи. Он может быть открытым, несекретным, так как для всех, кроме Боба, комбинации двоичных нулей и единиц сами по себе ничего не значат. Однако этот канал обязательно должен быть. Передача информации по нему не может проис-

ходить быстрее, чем со скоростью света. Это значит, что и скорость телепортационной передачи данных реально ограничена скоростью света. Таким образом, квантовая телепортация, будучи, в принципе, мгновенным во времени и нелокальным в пространстве физическим явлением, не противоречит специальной теории относительности.

18. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сегодня квантовая информатика развивается исключительно быстрыми темпами. Представление о том, насколько динамично это развитие, можно получить, обращаясь к электронным ресурсам – сайтам лабораторий, научных групп и институтов, работающих в данной области (см. раздел «интернет-ресурсы» списка литературы). Важнейшим источником оперативной информации является электронный архив Лос-Аламосской национальной лаборатории, чей адрес <http://xxx.lanl.gov> хорошо известен специалистам; работы по квантовой информатике появляются там в разделе Quantum Physics.

19. ЗАДАЧИ

1. Найдите собственные вектора и собственные числа матриц Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Убедитесь, что их собственные вектора ортогональны друг другу.

2. Вычислите коммутаторы $[\sigma_i, \sigma_j]$ и антикоммутаторы $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ всех пар матриц Паули, а также квадраты самих матриц σ_i^2 .
3. Постройте разложения собственных векторов каждой из матриц Паули по собственным векторам двух других матриц.
4. Разложите матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 + 3i \\ 2 - 3i & 7 \end{pmatrix}$$

по базису, состоящему из матриц Паули и единичной матрицы.

5. Попробуйте построить аналогичное разложение для матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 + 3i \\ 2 + 3i & 7i \end{pmatrix},$$

используя только вещественные коэффициенты. Удалось ли это сделать? Если нет, то почему?

6. Пусть \mathbf{v} – единичный вектор в трехмерном пространстве. Рассмотрим оператор $\mathbf{v}\hat{\mathbf{s}} \equiv v_x\hat{s}_x + v_y\hat{s}_y + v_z\hat{s}_z$, который называют оператором проекции спина на ось \mathbf{v} . Установите (без вычислений), чему равны собственные числа этого оператора, а затем найдите (уже проведя соответствующие расчеты) его собственные спиноры.

7. Найдите средние значения всех проекций спина в состоянии, описываемом спинором

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Можно ли сразу использовать этот спинор для вычислений или же он нуждается в предварительной обработке.

8. Вычислите среднеквадратичные отклонения проекций спина от их средних значений для того же спинора χ . Какая из проекций имеет в этом состоянии определенное значение?

9. Убедитесь, что матрицы квантовых элементов \mathbf{X} , \mathbf{Z} и \mathbf{H} унитарны.

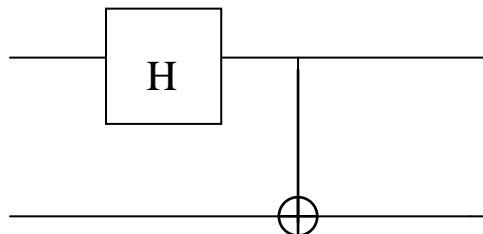
10. Докажите, что эрмитова унитарная матрица равна своей обратной.

11. Квантовый логический элемент Адамара \mathbf{H} равен сумме элементов \mathbf{X} и \mathbf{Z} , деленной на $\sqrt{2}$. Матрицы самих этих элементов совпадают с матрицами Паули, которые отличаются от операторов проекций спина вещественным множителем $\hbar/2$. Докажите, не прибегая к прямым вычислениям, что $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} – тождественный логический элемент.

12. Найдите вектор состояния на выходе квантового элемента CNOT, если на управляющий вход подан произвольный кубит, а на управляемый – кубит $|1\rangle$.

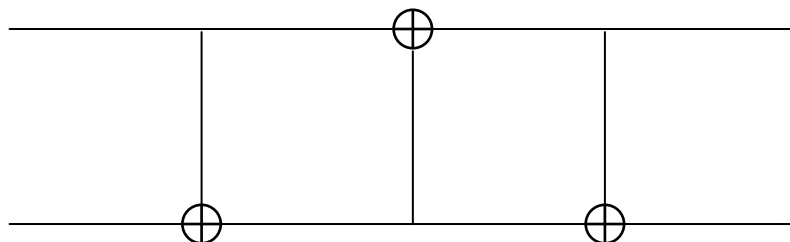
13. Как выглядит матрица квантового логического элемента CNOT после перестановки входных кубитов, т. е. когда первому символу в двухкубитовом кет-векторе $|A, B\rangle$ отвечает управляемый кубит, а второму – управляющий.

14. Выясните, как преобразует базисные состояния $|01\rangle$, $|10\rangle$ и $|11\rangle$ схема



15. Найдите матрицу квантового логического элемента («элемента Белла»), отвечающего этой схеме.

16. Вычислите матрицу квантового элемента обмена, действие которого изображает схема



17. Квантовый догический элемент «управляемый Z » действует следующим образом. Если на управляющий вход подан ноль, то сигнал в управляемом канале не изменяется. Если же на управляющий вход подана единица, то управляемый канал работает как элемент Z . Найдите матрицу квантового элемента «управляемый Z ».

18. Попробуйте догадаться, что представляет собой двухкубитовый элемент «управляемый сдвиг фазы». Найдите матрицу этого элемента.

19. Ридберговский атом – это атом щелочного металла в высоковозбужденном состоянии ($n \sim 50$). Найдите частоту электромагнитного излучения, вызывающего квантовые переходы между состояниями ридберговского атома с $n = 50$ и $n = 51$, и соответствующую ей длину волны.

20. Во сколько раз размер циркулярного ридберговского атома с $n = 50$ больше размера атома водорода в основном состоянии? Сделайте оценку, найдя (по порядку величины) радиус соответствующей боровской орбиты, а затем уточните ее, проанализировав структуру волновой функции электрона с $n = 50$, $l = 49$. Напомним, что радиальная часть боровской орбитали имеет вид:

$$R_{nl}(r) = A_{nl} (r/a)^l \exp(-r/an) L_{n+l}^{2l+1}(2r/an),$$

где A_{nl} – нормировочный коэффициент, $L_k^i(x)$ – обобщенный полином Лагерра, а плотность вероятности модуля \mathbf{r} связана с R_{nl} известным соотношением $\rho(r) = r^2 R_{nl}^2$.

21. Оцените по порядку величины матричные элементы оператора дипольного момента, отвечающие квантовым переходам между соседними ридберговскими состояниями, и сравните их с матричными элементами для обычных, слабовозбужденных состояний.

22. Каково среднее равновесное число фотонов частоты 50 ГГц с определенными поляризацией и волновым вектором при температуре 295 К; 10 К; 0.8 К; 0.1 К?

23. Рассчитайте среднее число тепловых фотонов в объеме 1 см^3 при температурах 295 К, 2.725 К (реликтовое излучение) и 0.1 К. Можно ли здесь использовать численные значения мировых констант с точностью до трех знаков или следует взять более точные данные?

20. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое спинор?
2. Как выглядят собственные спиноры матриц Паули σ_x и σ_y ?
3. Какое максимально возможное количество информации может хранить и переносить:
 - а) классический момент с двумя значениями проекции?
 - б) реальный – квантовый – спин?
4. Что такое кубит?
5. Приведите примеры физической реализации кубитов.
6. Как выглядит матрица логического элемента Адамара?
7. Произвольны ли матрицы квантовых логических элементов? Если нет, то какими (эрмитовыми, унитарными, ортогональными) они являются?
8. Что такое сфера Блоха?
9. Где на сфере Блоха расположены состояния $|0\rangle$, $i|1\rangle$, $(|0\rangle+i|1\rangle)/\sqrt{2}$?
10. Как выглядят матрицы квантовых логических элементов **X**, **Z** и **H**?
11. Можно ли преобразовать один произвольный кубит в другой, используя только квантовые логические элементы **X**, **Z** и **H**?
12. С помощью каких логических элементов можно построить произвольный двухкубитовый элемент?
13. Как выглядит нерелятивистское уравнение движения спина?
14. Что представляет собой движение спина во внешнем постоянном магнитном поле?
15. Что такое осцилляции Раби?
16. Какие квантовые логические элементы реализуют π - и $\pi/2$ -импульсы?
17. Что такое белловское состояние?
18. Образуют ли белловские состояния ортогональный базис в пространстве двухкубитовых квантовых состояний?
19. Какие квантовые состояния называют запутанными (entangled)?
20. Зависит ли степень запутанности квантового состояния от расстояния между частицами?
21. Что такое сепарабельные состояния?
22. Как выглядит волновая функция состояния Гринбергера-Хорна-Цайлингера для n кубитов?
23. Какие атомы называют ридберговскими?

24. Существуют ли перепутанные состояния квантовых систем разной физической природы, например, фотонной моды и атома?
25. Каковы основные свойства запутанности как фундаментальной характеристики многочастичного квантового состояния?
26. С какими состояниями, в основном, связан квантовый информационный ресурс?
27. Происходит ли при квантовой телепортации обмен частицами между передатчиком и приемником?
28. Возможна ли передача информации со скоростью, превышающей скорость света?
29. Можно ли осуществить связь путем квантовой телепортации в отсутствие дополнительного классического канала связи?
30. Сколько классических битов надо передать, чтобы телепортировать произвольное квантовое состояние кубита?
31. Происходит ли копирование кубита при квантовой телепортации?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Книги

1. М. Нильсен, И. Чанг. Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир. 2006. – 824 с.
2. Ш. Имре, Ф. Балаж. Квантовые вычисления и связь. М.: Физматлит. 2008. – 320 с.
3. А.С. Холево. Введение в квантовую теорию информации, К.: МЦНМО, 2002. – 128 с.
4. В.В. Белокуров, О.Д. Тимофеевская, О.А. Хрусталеv. Квантовая телепортация – обыкновенное чудо. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2000. – 256 с.
5. Д. Бауместер, А. Экерт, А. Цайлингер (ред.). Физика квантовой информации. М.: «Постмаркет». 2002. – 376 с.
6. А.В. Белинский. Квантовые измерения. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2008. – 184 с.
7. Г.П. Берман, Г.Д. Делен, Р. Майньери, В. Цифринович. Введение в квантовые компьютеры. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 188 с.
8. А.А. Кокин. Твердотельные квантовые компьютеры на ядерных спинах. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. – 204 с.
9. Э. Стин. Квантовые вычисления. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2000. – 112 с.
10. Дж. Прескилл. Квантовая информация и квантовые вычисления, Т. 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2008. – 464 с.
11. А. Китаев, А. Шень, М. Вялый. Классические и квантовые вычисления. М.: МЦНМО, 1999. – 192 с.

Обзоры

1. К.А. Валиев. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления. УФН, Т. 175, № 1, сс. 3-39, 2005.
2. И.В. Баргатин, Б.А. Гришанин, В.Н. Задков. Запутанные квантовые состояния атомных систем. УФН, Т. 171, № 6, сс. 625-647, 2001.
3. С.Я. Килин. Квантовая информация. УФН, Т. 169, № 5, сс. 507-526, 1999.
4. М.Б. Менский. Явление декогеренции и теория непрерывных квантовых измерений. УФН, Т. 168, сс. 1017-1035, 1998.
5. М.Б. Менский. Квантовая механика: новые эксперименты, новые приложения и новые формулировки старых вопросов. УФН, Т. 170, № 6, сс. 631-648, 2000.
6. М.Б. Менский. Квантовые измерения, феномен жизни и стрела времени.... УФН, Т. 177, № 4, сс. 415-425, 2007.
7. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki. Quantum entanglement. Rev. Mod. Phys., V. 81, No 2, pp. 865-942, 2009; <http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/0702225>.
8. N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, H. Zbinden. Quantum cryptography. Rev. Mod. Phys., V. 74, pp. 145-195, 2002; <http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/0101098>.
9. J.M. Raymond, M. Brune, S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. Rev. Mod. Phys., V. 73, No 3, pp. 565-582, 2001.
10. P.C.E. Stamp, A. Gaita-Arino. Spin-Based Quantum Computer Made by Chemistry: Hows and Whys. Journal of Materials Chemistry, V. 19, No 12, pp. 1718-1730, 2009; <http://xxx.lanl.gov/abs/0807.1986>.
11. L. Chirolli, G. Burkard. Decoherence in Solid State Qubits. Adv. in Physics., V. 57, No 3, pp. 225-285, May-June 2008; <http://xxx.lanl.gov/abs/0809.4716>.

12. O. Guehne, G. Toth. Entanglement Detection. Physics Reports, V. 474, No 1, pp. 1-75, 2009 (<http://xxx.lanl.gov/abs/0811.2803>).
13. I. Buluta, S. Ashhab, F. Nori. Natural and artificial atoms for quantum computation. <http://xxx.lanl.gov/abs/1002.1871>.
14. M. Aspelmeyer, A. Zeilinger. A quantum renaissance. Physics World, July issue, pp. 22-28, 2008.
15. D. Castelvecchi. Welcome to the Quantum Internet. Science News, V. 174, August 16th issue, 2008.

Интернет

http://perst.issph.kiae.ru/Inform/index_tem.htm
<http://qi.cs.msu.su>
<http://qi.phys.msu.su>
<http://qopt.phys.msu.su>
<http://quantopt.phys.spbu.ru>
<http://qinfo.itp.ac.ru>
<http://www.qubit.org>
<http://www.quantum.at>
<http://www.qi.damtp.cam.ac.uk>
<http://www.vjquantuminfo.org>
<http://www.media.mit.edu/quanta>
<http://www.phy.bris.ac.uk/groups/cqp/index.html>
<http://www.iqi.caltech.edu/index.html>
<http://www.theory.caltech.edu/people/preskill>
<http://www.research.ibm.com/physicsofinfo>
<http://www.research.ibm.com/quantuminfo/teleportation>
<http://tf.nist.gov/ion/index.htm>
http://www.quiprocone.org/Protected/DD_lectures.htm
<http://www.nbi.ku.dk/english/research/quantum-physics>
<http://quantum.info>