39

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 49

(Отдельный оттиск)

8

МОСКВА · 1965

Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 49 *1965* *Вып. 2(8)*

ПОЛЮСА ВТОРОГО ПОРЯДКА S-МАТРИЦЫ И РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ

Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев

Исследована общая картина движения полюсов S-матрицы на нефизическом листе комплексной энергии E при изменении потенциала. Найдены условия появления полюса второго порядка. Для потенциальной ямы с барьером этот полюс может лежать вблизи $E = 0$. Рассмотрено резонансное рассеяние в том случае, когда два простых полюса совпадают или лежат близко друг от друга.

1. Введение

Вопрос о полюсах высшего порядка S-матрицы привлекает в последнее время большое внимание как в связи с общей структурой S-матрицы [1], так и в связи с законом распада нестабильных частиц [2]. Существование полюсов высшего порядка тесно связано также с особенностями резонансного рассеяния частиц. Уже простое сопоставление известных формул для резонансного рассеяния приводит, как мы сейчас увидим, к выводу о существовании полюса второго порядка S-матрицы.

Рассмотрим рассеяние частиц с энергией E центральным силовым полем $V(r)$ конечного радиуса действия ($V(r) = 0$ при $r \geqslant R$). Будем считать частицы медленными, так что $kR \ll 1$, где $k = [2mE / \hbar^2]^{1/2}$, и соответственно учитывать лишь парциальную волну с нулевым моментом ($l = 0$). Обычно различают два вида резонансного рассеяния [3]: 1) рассеяние на потенциальной яме при наличии уровня энергии, близкого к границе сплошного спектра (или при наличии так называемого виртуального уровня); 2) рассеяние при наличии квазистационарного состояния, например в случае потенциальной ямы, окруженной барьером.

Для S-матрицы, связанной с фазой волновой функции δ соотношением $S = e^{2i\delta}$, используются соответственно два выражения.

В случае 1) (см., например, [4])

$$S = e^{2i\varphi(k)}\frac{(1 + k/k_1)}{(1 - k/k_1)}. \tag{1}$$

Здесь $k_1 = i\varkappa_1$ — чисто мнимое число. При наличии связанного состояния $\varkappa_1 > 0$; $\varphi(k)$ — фаза нерезонансной части рассеяния — так называемого потенциального рассеяния. В интересующем нас случае малой энергии можно считать

$$\varphi = kr_0. \tag{2}$$

При $|\varkappa_1|r_0 \ll 1$ из (1) и (2) получается известная формула

$$k \operatorname{ctg} \delta = -a^{-1} + {}^1/_2\rho k^2, \tag{3}$$

где длина рассеяния a и эффективный радиус ρ выражаются через $\varkappa$ и r_0:

$$a = \varkappa^{-1}, \qquad \rho = 2r_0. \tag{4}$$

В случае 2) для S-матрицы используется выражение [4]

$$S = e^{2i\varphi} \frac{(1 + k/k_1)(1 - k/k_1^*)}{(1 - k/k_1)(1 + k/k_1^*)}, \tag{5}$$

где k_1 и $-k_1^*$ — комплексные числа, расположенные в нижней полуплоскости k симметрично относительно мнимой оси.

Положение полюсов S-матрицы определяется видом потенциальной энергии V. Если изменять V, например постепенно уменьшать глубину потенциальной ямы, то естественно было бы ожидать, что при этом можно проследить переход от резонансного рассеяния вида 1) к резонансному рассеянию вида 2). Однако легко видеть, что с помощью формулы (1) такой переход проследить нельзя. Действительно, S-матрица, как известно, может быть представлена в виде

$$S = f(-k) \,/\, f(k),$$

где $f(k)$ — так называемая функция Иоста, являющаяся аналитической функцией во всей плоскости k в том случае, когда V обращается в нуль при $r \geqslant R$ (см. раздел 2). Следовательно, полюса S-матрицы являются нулями функции Иоста. Формула (5) написана в том приближении, когда учитываются два нуля $f(k)$. Поскольку число нулей аналитической функции не может изменяться при ее непрерывном изменении, то ясно, что никаким движением нулей $f(k)$ нельзя из формулы (5) получить формулу (1).

Для того чтобы проследить связь между различными случаями резонансного рассеяния, необходимо иметь формулу, учитывающую два нуля функции Иоста как в том случае, когда они лежат симметрично относительно мнимой оси, так и в том случае, когда оба они лежат на мнимой оси. Представляется очевидным, что при переходе от одного случая к другому мы неизбежно должны пройти через случай слияния двух нулей функции $f(k)$ на мнимой оси. Соответственно S-матрица должна иметь полюс второго порядка.

В настоящей работе проводится в общем виде исследование движения нулей функции Иоста при изменении потенциала V и выясняются условия, при которых происходит слияние двух нулей. Указан пример, когда двойной нуль лежит близко к точке $k = 0$. Получена формула для S-матрицы в приближении двух нулей функции Иоста, когда эти нули либо комплексные, либо чисто мнимые. Последний случай представляет собой обобщение формулы (1), позволяющее проследить переход между различными видами резонансного рассеяния.

В приближении двух нулей для $k \operatorname{ctg} \delta$ также получается формула вида (3), причем в том случае, когда точка слияния лежит близко к $k = 0$, эффективный радиус ρ оказывается отрицательным и большим по абсолютной величине.

2. Функция Иоста

Функция Иоста $f(k)$ определяется как значение при $r = 0$ решения уравнения

$$\frac{d^2 f(k, r)}{dr^2} + (k^2 - V) f(k, r) = 0, \tag{6}$$

имеющего при $r \to \infty$ асимптотический вид

$$f(k, r) = e^{ikr}. \tag{7}$$

(Свойства функции $f(k)$ подробно рассматриваются, например, в [5, 6].) В нашем случае (7) является точным равенством всюду при $r \geqslant R$. Тогда

$f(k)$ аналитична во всей плоскости комплексного k. Кроме того, функция $f(k)$ обладает свойством симметрии:

$$f(k^*) = f^*(-k).$$

В верхней полуплоскости $f(k)$ может иметь нули только на мнимой оси. Этим нулям соответствуют связанные состояния частицы в поле V. В нижней полуплоскости f может иметь нули как на мнимой оси, так и вне ее. В последнем случае, как вытекает из соотношения симметрии, нули расположены парами, симметрично относительно мнимой оси. Нули, расположенные на мнимой оси вблизи точки $k = 0$, соответствуют виртуальным состояниям. Парные нули, расположенные близко от вещественной оси (и симметрично относительно мнимой), соответствуют квазистационарным состояниям.

Приступим теперь к изучению нулей $f(k)$ на мнимой оси. Положим $k = i\varkappa$ и обозначим

$$f(i\varkappa) = g(\varkappa). \tag{8}$$

$g(\varkappa)$ есть значение при $r = 0$ функции $g(\varkappa, r)$, удовлетворяющей уравнению

$$d^2g \,/\, dr^2 - (\varkappa^2 + V)g = 0 \tag{9}$$

и имеющей при $r \geqslant R$ вид

$$g(\varkappa, r) = e^{-\varkappa r}. \tag{10}$$

Нули функции $g(\varkappa)$ обозначим через $\varkappa_n$:

$$g(\varkappa_n) = 0. \tag{11}$$

При вещественных $\varkappa$, r функции $g(\varkappa, r)$, $g(\varkappa)$ вещественны.

Воспользуемся формулой, содержащейся в работе одного из авторов [7], для производной функции Иоста в той точке, где сама функция равна нулю. В обозначениях настоящей работы эта формула может быть представлена в виде

$$-2\varkappa_n \frac{1}{g(-\varkappa_n)} \left(\frac{dg}{d\varkappa}\right)_{\varkappa=\varkappa_n} = e^{-2\varkappa_n R} + 2\varkappa_n \int\limits_0^R g^2(\varkappa_n, r)\, dr. \tag{12}$$

Если же $\varkappa_n > 0$, т. е. нуль соответствует связанному состоянию, то формула (12) упрощается и принимает вид

$$\frac{g'(\varkappa_n)}{g(-\varkappa_n)} = -\int\limits_0^\infty g^2(\varkappa_n, r)\, dr < 0. \tag{13}$$

Пусть $\varkappa_n > \varkappa_{n+1} > 0$ — два соседних нуля, тогда $g'(\varkappa_n)$ и $g'(\varkappa_{n+1})$ имеют противоположные знаки. Следовательно, противоположные знаки имеют также величины $g(-\varkappa_n)$, $g(-\varkappa_{n+1})$, и, таким образом, между точками $-\varkappa_n$, $-\varkappa_{n+1}$ лежит по крайней мере один нуль функции $g(\varkappa)$. Отсюда, в частности, вытекает, что в верхней полуплоскости не может быть кратных нулей функции Иоста $f(k)$, ибо из доказанного утверждения следовало бы, что $f(-k)$ также будет нулем, что противоречит теореме единственности.

Для потенциалов достаточно общего вида (яма, барьер, яма, окруженная барьером) можно показать, что правая часть уравнения (12)

$$\xi(\varkappa) = e^{-2\varkappa R} + 2\varkappa \int\limits_0^R g^2(\varkappa, r)\, dr \tag{14}$$

обращается в нуль только при одном значении $\varkappa = \bar{\varkappa} < 0$, причем $\xi(\varkappa) > 0$ при $\varkappa > \bar{\varkappa}$ и $\xi(\varkappa) < 0$ при $\varkappa < \bar{\varkappa}$. Тогда, используя формулу (12), легко доказать, что все вещественные нули функции $g(\varkappa)$ (мнимые нули функции $f(k)$) разбиваются на две группы:

$$\text{а)} \quad \varkappa_1 > \varkappa_2 >, \ldots, > \varkappa_N > \bar{\varkappa},$$

причем последний нуль $\varkappa_N$ может быть как положительным, так и отрицательным, а все остальные положительны, и

$$\text{б)} \quad \varkappa_2' < \varkappa_3' < \ldots < \varkappa_N' < \bar{\varkappa},$$

лежащие в интервалах

$$-\varkappa_1 < \varkappa_2' < -\varkappa_2, \quad -\varkappa_2 < \varkappa_3' < -\varkappa_3, \quad \ldots, \quad -\varkappa_{N-1} < \varkappa_N' < \bar{\varkappa}.$$

Поскольку функция $g(\varkappa)$ стремится к единице при $\varkappa \to +\infty$, то $g'(\varkappa_1) > 0$, $g(-\varkappa_1) < 0$, и вопрос о том, имеется ли нуль в интервале $-\infty < \varkappa < -\varkappa_1$, связан со знаком функции $g(\varkappa)$ при $\varkappa \to -\infty$. Используя уравнение для $g(\varkappa)$

$$g(\varkappa) = 1 - \int_0^R V(r) g(\varkappa, r)\, dr,$$

легко получить, что если при возрастании r потенциал $V(r)$ перед тем как обратиться в нуль был положителен (яма, окруженная барьером), то $g(\varkappa) > 0$ при $\varkappa \to -\infty$, и имеется еще один нуль $\varkappa_1' < -\varkappa_1$, так что общее число нулей четное. Если же перед обращением в нуль потенциал $V(r)$ был отрицателен, то $g(\varkappa) < 0$ при $\varkappa \to -\infty$, нуль $\varkappa_1'$ отсутствует и общее число нулей нечетное. Из этого результата особенно ясно видно, что сколь угодно малые изменения потенциала $V(r)$ на границе радиуса действия сил изменяют число нулей функции $g(\varkappa)$ при больших отрицательных $\varkappa$, так что эти нули имеют малый физический смысл.

Следует отметить, что для более сложных, например осциллирующих, потенциалов функция $\xi(\varkappa)$ может обращаться в нуль и несколько раз, тогда описанная выше простая картина расположения нулей усложняется. Однако такие потенциалы не представляют особого интереса, и мы их рассматривать не будем.

Выясним, как движутся нули $\varkappa_n$, $\varkappa_n'$ при изменении потенциала V. Пользуясь уравнением (9), в котором положено $\varkappa = \varkappa_n$, и учитывая (10) и (11), легко показать, что малой вариации δV соответствует сдвиг $\delta\varkappa_n$, равный в первом приближении

$$\delta\varkappa_n = -\frac{1}{\xi(\varkappa_n)} \int_0^R g^2(\varkappa_n, r)\, \delta V\, dr, \tag{15}$$

где $\xi(\varkappa)$ дается выражением (14) [1]. Рассмотрим такую вариацию δV, при которой

$$\int_0^R g^2\, \delta V\, dr > 0 \tag{16}$$

при вещественных $\varkappa$. В частности, этому условию удовлетворяет, например, вариация δV, представляющая собой уменьшение глубины потенциальной ямы. Тогда, принимая во внимание установленные выше свойства

[1] Заметим, что формула (15) аналогична формуле Зельдовича [8] для изменения энергии квазистационарного состояния δE при небольшом изменении δV.

$\xi(\varkappa)$, получим

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \delta\varkappa_n < 0 \ \text{при}\ \varkappa_n > \bar{\varkappa}, \\ &\text{б)}\ \delta\varkappa_n' > 0 \ \text{при}\ \varkappa_n' < \bar{\varkappa}. \end{aligned} \tag{17}$$

Это означает, что нули одной группы движутся навстречу нулям другой группы. (Сама точка $\bar{\varkappa}$, очевидно, также движется при изменении V.)

В точке $\bar{\varkappa}$ соотношение (15) неприменимо, так как знаменатель обращается в нуль. Для того чтобы исследовать движение нулей вблизи точки $\bar{\varkappa}$, необходимо уточнить формулу (15). Оказывается достаточным учесть поправку первого порядка по $\delta\varkappa_n$ к величине $\xi(\varkappa)$ вблизи точки $\bar{\varkappa}$, т. е. положить

$$\xi(\varkappa_n) = \delta\varkappa_n (d\xi / d\varkappa)_{\bar{\varkappa}}. \tag{18}$$

Тогда вместо (15) получим

$$(\delta\varkappa_n)^2 = -\frac{1}{(d\xi/d\varkappa)_{\bar{\varkappa}}} \int_0^R g^2 \delta V\, dr. \tag{19}$$

В точке $\bar{\varkappa}$, как вытекает из свойств величины $\xi(\varkappa)$, имеем $(d\xi / d\varkappa)_{\bar{\varkappa}} > 0$. Следовательно, для рассматриваемых вариаций (16) величина $(\delta\varkappa_n)^2$ отрицательна, так что $\delta\varkappa_n$ оказывается мнимым.

Вспоминая, что ранее мы положили $k = i\varkappa$, получаем, что мнимой вариации $\delta\varkappa_n$ соответствует вещественная вариация k, в результате которой нули сходят с мнимой оси. Таким образом, мы приходим к заключению, что при вариации потенциала (16) нули, у которых $\varkappa_n > \bar{\varkappa}$, движутся навстречу нулям, у которых $\varkappa_n < \bar{\varkappa}$. Они попарно сливаются в точке $\bar{\varkappa}$, а затем расходятся вправо и влево от мнимой оси. Траектория нулей показана на рис. 1. Непарный нуль, если он есть, движется вниз по мнимой оси, оставаясь все время выше точки $i\bar{\varkappa}$. Эта общая картина движения нулей была подтверждена Нуссенцвейгом [9] для частного случая прямоугольной ямы путем численного расчета.

Рассмотрим теперь условие слияния нулей. Как вытекает из (12), это условие имеет вид

$$e^{-2\bar{\varkappa}R} + 2\bar{\varkappa} \int_0^R g^2(\bar{\varkappa}, r)\, dr = 0.$$

Его можно переписать в виде

$$\int_0^R (e^{-2\bar{\varkappa}r} - g^2)\, dr = \frac{1}{2\bar{\varkappa}}.$$

Особый интерес представляет случай, когда точка слияния лежит близко к началу координат, так что $|\bar{\varkappa}| R \ll 1$, тогда интеграл

$$\frac{1}{2}\int_0^R [e^{-2\bar{\varkappa}r} - g^2(\bar{\varkappa}, r)]\, dr \approx \frac{1}{2}\int_0^R [1 - g^2(0, r)]\, dr$$

практически совпадает с эффективным радиусом ρ (см., например, [4]), так что

$$\rho = 1 / \bar{\varkappa}.$$

Отсюда вытекает, что ρ отрицательно, и что $|\rho| \gg R$.

Такое положение имеет место в случае потенциальной ямы, окруженной потенциальным барьером. На рис. 2 приведен общий ход функции g

для этого случая, из которого достаточно ясно видно как то, что $\rho < 0$, так и то, что $|\rho| \gg R$. По порядку величины $\varkappa$ определяется проницаемостью барьера, т. е. экспоненциально мала, а следовательно, ρ экспоненциально велико. Прямой расчет, который можно легко провести до конца для ямы с барьером прямоугольной формы, подтверждает правильность картины, изображенной на рис. 2.

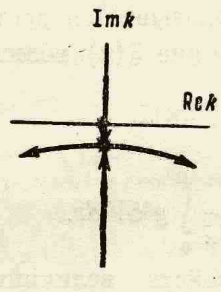

Рис. 1

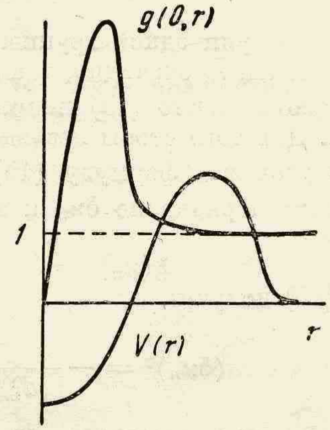

Рис. 2

3. *S*-матрица в приближении двух полюсов

Пусть k_1, k_2 . . . — нули функции Иоста. Если нули распределены так, что ряд Σk_n^{-1} сходится, то функция Иоста может быть представлена в виде бесконечного произведения

$$f = e^{-i\varphi(k)} \prod_n \left(1 - \frac{k}{k_n}\right) =$$

$$= e^{-i\varphi(k)} \left[1 - k \sum_n \frac{1}{k_n} + k^2 \sum_{n,\, m} \frac{1}{k_n k_m} + \ldots\right].$$

Рассмотрим случай, когда два нуля k_1 и k_2 близки к точке своего слияния и сама эта точка находится вблизи $k = 0$. Тогда главную роль при рассеянии медленных частиц будут играть только эти нули. Соответственно этому мы пренебрежем в суммах $\Sigma_n k_n^{-1}$ и $\Sigma_{n,\, m} k_n^{-1} k_m^{-1}$ всеми членами, кроме $k_1^{-1} + k_2^{-1}$ и $k_1^{-1} k_2^{-1}$. Это даст нам $f(k)$ в приближении двух нулей. Пользуясь к тому же приближением (2) для $\varphi(k)$, получим

$$f(k) = e^{-ikr_0}[1 - k(k_1^{-1} + k_2^{-1}) + k^2 (k_1 k_2)^{-1}].$$

Отсюда для S-матрицы имеем

$$S = e^{2ikr_0} \frac{(1 + k/k_1)(1 + k/k_2)}{(1 - k/k_1)(1 - k/k_2)}. \tag{20}$$

При $k_2 = -k_1^*$ формула (20) совпадает с (5). В том случае, когда k_1 и k_2 лежат на мнимой оси, формула (20) представляет собой обобщение (1) на случай двух нулей. Представим k_1 и k_2 в виде

$$k_1 = \sqrt{\Delta} - i\alpha, \qquad k_2 = -\sqrt{\Delta} - i\alpha. \tag{21}$$

Величина $\alpha = {}^1/_2 i(k_1 + k_2)$ дает положение «центра тяжести» нулей на мнимой оси, причем знаки выбраны так, что $\alpha > 0$, когда центр тяжести лежит в нижней полуплоскости; величина $2\sqrt{\Delta}$ дает расстояние между нулями. Случай 1) раздела 1 соответствует $\Delta < 0$, а случай 2) соответствует $\Delta > 0$; переход между ними происходит через точку $\Delta = 0$.

Заметим, что из результатов раздела 2 следует невозможность обращения α в нуль. Величина α всегда положительная (в приближении двух нулей).

Пользуясь соотношением $S = e^{2i\delta}$, формулой (20) и обозначениями (21), получаем для длины рассеяния выражение

$$a \equiv -\lim_{k\to 0}[k \operatorname{ctg}\delta]^{-1} = -(2\alpha/(\alpha^2+\Delta)+r_0). \tag{22}$$

В том случае, когда $r_0 \ll |a|$, из (20) может быть получена формула вида (3)

$$k \operatorname{ctg}\delta = -1/a + {}^1/_2(2r_0 - 1/\alpha)k^2. \tag{23}$$

Таким образом, роль эффективного радиуса играет теперь величина

$$\rho = 2r_0 - 1/\alpha. \tag{24}$$

Как видно, при достаточно малом α величина ρ становится отрицательной и большой по абсолютной величине. Заметим, что условие $r_0 \ll 1/\alpha$, необходимое для этого, может быть выполнено одновременно с условием $r_0 \ll \alpha/(\alpha^2+\Delta)$, необходимым для применимости формулы (23).

Приведем в заключение формулу для эффективного сечения рассеяния в том случае, когда $\Delta = 0$ (или $|\Delta| \ll \alpha^2$ и когда $r_0 \ll \alpha^{-1}$. Сечение в этом случае определяется одним параметром α:

$$\sigma = 16\pi\alpha^2/(k^2+\alpha^2)^2. \tag{25}$$

Состояния, соответствующие такому (или близкому) расположению нулей, будут долгоживущими и в то же время будут распадаться не по экспоненциальному, а по степенному закону [7]. Однако сам интервал изменения параметров, входящих в потенциал, когда такие состояния существуют, тем меньше, чем больше время их жизни, так что экспериментальное их наблюдение, например в ядрах, весьма затруднительно.

Все наши выводы можно провести и для рассеяния с ненулевым моментом количества движения, т. е. для $l \neq 0$. В этом случае центробежный барьер, непроницаемый при $k = 0$, приводит к тому, что слияние нулей происходит в начале координат, после чего они расходятся вправо и влево, вдоль вещественной оси k, отклоняясь в нижнюю полуплоскость, так что $\operatorname{Im} k_n \sim (\operatorname{Re} k_n)^{2l}$. Таким образом, для рассеяния с $l \neq 0$, в отличие от s-рассеяния, квазистационарные состояния появляются непосредственно вслед за исчезновением связанного состояния и слияния двух нулей.

Отметим, что, исследуя поведение нулей на мнимой оси, мы фактически не использовали таких свойств функции Иоста как ее аналитичность во всей комплексной плоскости и т. п. Поэтому результаты можно распространить и на экспоненциально убывающие, как $e^{-\gamma r}$, потенциалы, ограничиваясь, конечно, областью $-\gamma < \varkappa < +\infty$.

4. Заключение

Таким образом, при резонансном рассеянии частиц малой энергии, как правило, нужно пользоваться не одно-, а двухполюсным приближением для S-матрицы. Это нужно делать всегда при рассеянии с отличным от нуля моментом количества движения l (в § 131 книги Ландау и Лифшица [3] фактически учитывается именно это обстоятельство). Исключением является s-рассеяние потенциальной ямой, когда приближение двух полюсов практически неприменимо, ибо в том случае, когда два полюса в нижней полуплоскости k сближаются, они отстоят от начала координат на расстояние того же порядка, что и следующий полюс в верхней полуплоскости. Однако в том случае, когда имеется яма, окруженная барьером, причем проницаемость ε барьера мала ($\varepsilon \ll 1$), приближение двух полюсов пригодно вплоть до энергии $E < \Delta E$, где ΔE — расстояние между уровнями в окрестности $E = 0$. В то же время приближение одного полюса либо вообще неприменимо, либо применимо в очень малой области $E < \varepsilon\Delta E$, если один из полюсов находится на расстоянии существенно меньшем, чем $\varepsilon\Delta E$, от начала координат.

Всякая стабилизация s-состояния, перешедшего в сплошной спектр, приводит к тому, что точка слияния полюсов подходит близко к началу координат, так что становится необходимо использовать двухполюсное приближение. Такая стабилизация в более сложных задачах может вызываться не только потенциальным барьером, но и другими причинами: слабостью динамического взаимодействия с частицами рассеивателя, особенностями системы с большим числом частиц и т. п.

Рассмотренное здесь поведение полюсов S-матрицы на «нефизическом» листе энергии E существенно также при рассмотрении медленных столкновений отрицательных ионов с атомами, когда при их сближении связанное состояние электрона «выталкивается» в сплошной спектр [10]. В зависимости от того, насколько близко от начала координат находится точка слияния, можно получить качественно различные результаты для вероятности отрыва электрона при столкновении. Эти вопросы обсуждаются более подробно в следующей работе [11].

В заключение мы благодарим В. А. Фока, Л. Д. Фаддеева и Г. В. Дубровского за обсуждение вопросов, рассмотренных в статье.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 16 марта 1965 г.

Литература

[1] R. J. Eden, P. V. Landshoff. Phys. Rev., **136**, B1817, 1964.
[2] M. L. Goldberger, K. M. Watson. Phys. Rev., **136**, B 1472, 1964.
[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, 2-е изд., Физматгиз, 1963, гл. 27.
[4] А. И. Ахиезер, И. Я. Померанчук. Некоторые вопросы теории ядра, 2-е изд., Гостехиздат, 1950, гл. 3, § 23.
[5] R. Newton. J. Math. Phys., **1**, 319, 1963.
[6] Л. Д. Фаддеев. УМН, **14**, 57, 1959.
[7] Г. Ф. Друкарев. ЖЭТФ, **21**, 59, 1951.
[8] Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, **39**, 776, 1960.
[9] H. M. Nussenzveig. Nucl. Phys., **11**, 499, 1959.
[10] Ю. Н. Демков. ЖЭТФ, **46**, 1127, 1964.
[11] Ю. Н. Демков. ЖЭТФ, **49**, *9*, 1965.

S MATRIX POLES OF THE SECOND ORDER AND RESONANCE SCATTERING

Yu. N. Demkov, G. F. Drukarev

The movement of the S matrix poles on the unphysical sheet of complex energy E during the variation of the potential is investigated. The conditions for appearance of second order poles are determined. For a potential well with a barrier the pole may lie near $E = 0$. Resonance scattering is considered for the case when two simple poles coincide or lie close to each other.