Академия наук СССР
Журнал экспериментальной и теоретической физики
Том 36, вып. 1, 1959 г.

Ю. Н. Демков

ГРУППА СИММЕТРИИ ИЗОТОПНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 36 *1959* *Вып. 1*

ГРУППА СИММЕТРИИ ИЗОТРОПНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Ю. Н. Демков

Показано, что определение группы изотропного осциллятора с помощью инфинитезимальных операторов и производящих элементов, данное ранее автором, и определение с помощью канонических преобразований, данное Бекером,— эквивалентны. Рассмотрен явный вид унитарных операторов группы и показана их связь с функцией Грина для осциллятора.

Рассмотрим n-мерный изотропный осциллятор, причем систему единиц выберем так, чтобы частота, постоянная Планка и масса были равны единице. Тогда оператор энергии системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(p_k^2 + x_k^2), \tag{1}$$

а уровни энергии системы

$$E_m = m + n/2 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

вырождены, причем это вырождение не объясняется одной только сферической симметрией системы.

Группа симметрии изотропного осциллятора, объясняющая дополнительное вырождение уровней энергии и тесно связанная с симметрией между координатами и импульсами системы, была первоначально рассмотрена автором [1,2]. При этом группа унитарных операторов, коммутирующих с гамильтонианом, определялась с помощью производящих операторов (вращения и одномерные преобразования Фурье), всевозможные произведения которых и образуют группу. Кроме того, были получены инфинитезимальные операторы группы и рассмотрены перестановочные соотношения между ними.

В работе Бекера [3] группа симметрии осциллятора рассмотрена с несколько иной точки зрения; элементы группы определялись с помощью канонического преобразования, оставляющего инвариантным гамильтониан. Было показано также, что группа симметрии n-мерного изотропного осциллятора изоморфна n-мерной унитарной группе.

Связь между обеими точками зрения для двухмерного осциллятора была частично рассмотрена в работе Аллилуева [4]. Оказалось, что в этом случае для объяснения добавочного вырождения достаточно рассматривать унимодулярную унитарную группу (изоморфную группе трехмерных вращений), причем ее инфинитезимальные операторы являются линейными комбинациями соответствующих операторов в [1,2].

Мы покажем здесь, что оба способа определения группы симметрии эквивалентны в общем случае.

Установим прежде всего, что перестановочные соотношения между инфинитезимальными операторами

$$\begin{aligned} H_x &= p_x^2 + x^2; & M_x &= yp_z - zp_y, & N_x &= p_y p_z + yz,\\ H_y &= p_y^2 + y^2, & M_y &= zp_x - xp_z, & N_y &= p_z p_x + zx,\\ H_z &= p_z^2 + z^2, & M_z &= xp_y - yp_x, & N_z &= p_x p_y + xy, \end{aligned} \tag{3}$$

которые были получены в работах [1,2], совпадают с перестановочными соотношениями между инфинитезимальными матрицами трехмерной линейной унитарной группы. Действительно, матрица бесконечно малого линейного унитарного преобразования может быть записана в виде

$$U = I + i\varepsilon L, \tag{4}$$

где I — единичная, L — произвольная эрмитова матрицы, а ε — параметр малости. Отсюда видно, что в качестве линейно независимых инфинитезимальных матриц можно выбрать n^2 матриц M^{ij}, N^{ij} с элементами

$$M^{ij}_{rs} = i(\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}), \quad N^{ij}_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}. \tag{5}$$

Перестановочные соотношения между этими матрицами имеют вид

$$\begin{aligned} [M^{ij}, M^{kl}] &= iM^{il}\delta_{jk} - iM^{ik}\delta_{jl} - iM^{jl}\delta_{ik} + iM^{jk}\delta_{il}, \\ [M^{ij}, N^{kl}] &= iN^{il}\delta_{jk} + iN^{ik}\delta_{jl} - iN^{jl}\delta_{ik} - iN^{jk}\delta_{il}, \\ [N^{ij}, N^{kl}] &= -iM^{il}\delta_{jk} - iM^{ik}\delta_{jl} - iM^{jl}\delta_{ik} - iM^{jk}\delta_{il}. \end{aligned} \tag{6}$$

Если теперь положить при $n = 3$

$$\begin{aligned} N^{11} &= H_x, \quad N^{12} = N_z, \quad M^{12} = -M_x, \\ N^{22} &= H_y, \quad N^{23} = N_x, \quad M^{23} = -M_y, \\ N^{33} &= H_z, \quad N^{31} = N_y, \quad M^{31} = -M_z, \end{aligned} \tag{7}$$

то мы получим перестановочные соотношения между операторами (3), которые приведены в [2][1]. Таким образом, группа симметрии, определенная в работах [1,2], изоморфна унитарной группе, а следовательно, изоморфна также и группе симметрии, рассмотренной Бекером[2]. Обобщение на случай $n>3$ является тривиальным.

Покажем теперь, что обе группы эквивалентны, т. е. что унитарные операторы, выполняющие канонические преобразования Бекера, совпадают с операторами, рассмотренными в [1,2].

Бекер [3] вводит неэрмитовы операторы

$$a_k = (x_k + ip_k)/\sqrt{2}, \; a_k^+ = (x_k - ip_k)/\sqrt{2}, \tag{8}$$

и унитарной матрице U соответствует каноническое преобразование

$$a'_k = \sum_{l=1}^{n} U_{kl} a_l, \quad \bar{a}'^+_k = \sum_{l=1}^{n} U^*_{kl} a^+_l. \tag{9}$$

Легко убедиться, что такое преобразование оставляет инвариантными оператор H и перестановочные соотношения между операторами a_k и $a_k{}^+$. Для того чтобы построить унитарный оператор, соответствующий этому каноническому преобразованию вернемся к переменным x_k, p_k. Используя (8) и (9), получаем

$$x'_k = \sum_{l=1}^{n} (A_{kl}x_l - B_{kl}p_l), \quad p'_k = \sum_{l=1}^{n} (B_{kl}x_l + A_{kl}p_l), \tag{10}$$

$$x_k = \sum_{l=1}^{n} (A_{lk}x'_l + B_{lk}p'_l), \quad p_k = \sum_{l=1}^{n} (-B_{lk}x'_l + A_{lk}p'_l), \tag{11}$$

---

[1] В перестановочных соотношениях (19) работы [2] содержится ошибка: в формулах (8) и (11) следует изменить знак правой части.

[2] Точнее, отсюда следует, что существует одно-однозначное групповое соответствие между элементами, принадлежащими к некоторым окрестностям единичных элементов обеих групп.

где

$$U_{kl} = A_{kl} + iB_{kl} \tag{12}$$

и A_{kl}, B_{kl} — вещественны. Соответствующий этому преобразованию унитарный оператор легко записать в интегральной форме; ядро его $f_U(x_1, x_2, \ldots, x_n; x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ будет собственной функцией операторов x_k в x'-представлении с собственными значениями x_k, а f_U^* будет собственной функцией операторов x'_k в x-представлении с собственными значениями x'_k. Из этого условия ядро f_U определяется с точностью до множителя, не зависящего от x_k, x'_k.

Рассмотрим частный случай преобразования (10), (11), когда преобразуется только одна пара координат и импульсов. В этом случае можно без ограничения общности рассматривать одномерный осциллятор. Тогда $U = \exp i\varphi$, $A = \cos\varphi$, $B = \sin\varphi$ и ядро соответствующего интегрального оператора удовлетворяет уравнениям

$$\begin{gathered} -i\sin\varphi\cdot\partial f/\partial x + \cos\varphi\cdot xf = x'f, \\ i\sin\varphi\cdot\partial f^*/\partial x' + \cos\varphi\cdot x'f = xf. \end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда получаем

$$f_\varphi(x, x') = C(\varphi)\exp[ixx'/\sin\varphi - (i/2)(x^2 + x'^2)\operatorname{ctg}\varphi]. \tag{14}$$

Коэффициент $C(\varphi)$ можно определить, потребовав, чтобы оператор, действуя на волновую функцию основного состояния $\exp(-x^2/2)$, не изменял ее. Окончательно

$$\begin{gathered} f_\varphi(x, x') = (2\pi\sin\varphi)^{-1/2}\exp[ixx'/\sin\varphi - \\ -(i/2)(x^2 + x'^2)\operatorname{ctg}\varphi - i\varphi/2 + i\pi/4]. \end{gathered} \tag{15}$$

Соответствующий инфинитезимальный оператор можно найти, вычисляя при малых φ выражение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varphi(x, x')\,\psi(x')\,dx' \tag{16}$$

(где ψ — произвольная функция) с точностью до членов пропорциональных φ. Используя метод наискорейшего спуска получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varphi(x, x')\,\psi(x')\,dx' = \psi(x) + i\varphi\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\psi(x) + O(\varphi^2). \tag{17}$$

Таким образом, инфинитезимальный оператор, соответствующий этому бесконечно малому преобразованию, действительно совпадает с точностью до множителя с оператором H_x из формул (3). Наличие дополнительного слагаемого $-1/2$ необязательно; добавление его не меняет перестановочных соотношений между операторами и приводит лишь к тому, что функция основного состояния остается неизменной при действии на нее операторов группы.

Используя формулу (17) легко получить разложение функции f_φ по собственным функциям осциллятора

$$f_\varphi(x, x') = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x)\,\psi_m(x')\,e^{im\varphi}. \tag{18}$$

Отсюда непосредственно следует связь функции f с функцией Грина для одномерного осциллятора

$$G(x, x', t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x)\,\psi_m(x')\,e^{-iE_m t} = e^{-it/2} f_{-t}(x, x') =$$
$$= (2\pi \sin t)^{-1/2} \exp\left[-ixx'/\sin t + (i/2)(x^2 + x'^2)\operatorname{ctg} t - i\pi/4\right]. \quad (19)$$

При $t = \pi/2 = T/4$, где $T = 2\pi$ — период колебаний в наших единицах, мы получаем с точностью до множителя оператор одномерного преобразования Фурье

$$G(x, x', T/4) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-ixx' - i\pi/4). \quad (20)$$

Таким образом, если в момент времени $t = 0$ волновая функция осциллятора в x-представлении была $\psi_0(x)$, а в p-представлении — $\varphi_0(p)$, то в последующие моменты она будет меняться следующим образом:

$t=$	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
ψ:	$\psi_0(x)$	$e^{-i\pi/4}\varphi_0(x)$	$e^{-i\pi/2}\psi_0(-x)$	$e^{-i3\pi/4}\varphi_0(-x)$	$e^{-i\pi}\psi_0(x)$
φ:	$\varphi_0(p)$	$e^{-i\pi/4}\psi_0(-p)$	$e^{-i\pi/2}\varphi_0(-p)$	$e^{-i3\pi/4}\psi_0(p)$	$e^{-i\pi}\varphi_0(p)$.

Следовательно, изменение волновой функции осциллятора во времени можно получить, действуя на начальную волновую функцию унитарным оператором группы симметрии, положив в нем $\varphi = -t$. Это развитие во времени представляет собой непрерывный переход от координатной волновой функции к импульсной и обратно.

Рассмотрим далее второй тип преобразований, в котором участвуют две пары координат и импульсов. Пусть унитарная матрица имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & i\sin\varphi \\ i\sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Эти матрицы образуют группу, а при малых φ имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} + i\varphi \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} + O(\varphi^2), \quad (22)$$

т. е. инфинитезимальный оператор этой подгруппы соответствует недиагональному оператору N^{ij} группы симметрии осциллятора. Преобразование координат имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} x_1' &= \cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot p_2, \quad & x_1 &= \cos\varphi \cdot x_1' + \sin\varphi \cdot p_2', \\ x_2' &= \cos\varphi \cdot x_2 - \sin\varphi \cdot p_1, \quad & x_2 &= \cos\varphi \cdot x_2' + \sin\varphi \cdot p_1'. \end{aligned} \quad (23)$$

Составляя систему уравнений аналогичную системе (13) и определяя нормировочный коэффициент тем же способом, получаем

$$f_\varphi(x_1, x_2; x_1', x_2') = (2\pi \sin\varphi)^{-1} \exp\left[i(x_1 x_2' + x_1' x_2)/\sin\varphi - i(x_1 x_2 + x_1' x_2')\operatorname{ctg}\varphi\right]. \quad (24)$$

Наконец, вычисляя по методу наискорейшего спуска результат действия оператора на произвольную функцию при малых φ, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varphi(x_1, x_2; x_1', x_2')\,\psi(x_1', x_2')\,dx_1' dx_2' =$$
$$= \psi(x_1, x_2) + i\varphi(-\partial^2/\partial x_1 \partial x_2 + x_1 x_2)\,\psi(x_1, x_2) + O(\varphi^2). \quad (25)$$

Полученный инфинитезимальный оператор совпадает с операторами N в формулах (3).

Третий вид преобразования, соответствующий матрице

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{26}$$

как легко видеть не перемешивает координат и импульсов и представляет собой чистое вращение в плоскости x_1, x_2. В этом случае инфинитезимальным оператором будет соответствующая компонента момента количества движения.

Таким образом, инфинитезимальные операторы групп, определенных в работах [1,2] и [3] — одинаковы. Кроме того, производящие элементы группы, определенной в [1,2], входят в группу, определенную в [3]. Отсюда следует, что обе группы совпадают.

Найдем, наконец, с точностью до нормировочного множителя явный вид ядра интегрального оператора для произвольной матрицы U. В этом случае функция $f(X, X')$ удовлетворяет системе уравнений

$$(\widetilde{A}X' - i\widetilde{B}\nabla')f = Xf, \quad (AX - iB\nabla)f = X'f, \tag{27}$$

где использованы очевидные матричные обозначения, а $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ означают транспонированные матрицы. Умножая оба уравнения соответственно на $\widetilde{B}^{-1}$ и B^{-1}, получаем

$$\nabla' f / f = i\widetilde{B}^{-1}X - i\widetilde{B}^{-1}\widetilde{A}X', \quad \nabla f / f = iB^{-1}X' - iB^{-1}AX. \tag{28}$$

Из унитарности матрицы U непосредственно следует, что матрицы $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{A}$, $B^{-1}A$ — симметричны и, следовательно, уравнения (28) разрешимы. Решая их, находим общий вид ядра интегрального оператора

$$f = C \exp[i\widetilde{X}B^{-1}X' - (i/2)(\widetilde{X}'AB^{-1}X' + \widetilde{X}B^{-1}AX)]. \tag{29}$$

Коэффициент C опять-таки может быть определен из требования о том, чтобы оператор не изменял функцию основного состояния.

В заключение отметим, что изотропный осциллятор представляет собой пример системы, в которой оператор энергии полностью выражается через инфинитезимальные операторы группы симметрии. В таких случаях из одних только свойств симметрии системы могут быть получены в принципе и все остальные ее свойства (уровни энергии, степень вырождения, функция Грина и т. п.).

Ленинградский
государственный университет

Поступила в редакцию
23 января 1958 г.

Литература

[1] Ю. Н. Демков. ЖЭТФ, **26**, 757, 1954.
[2] Ю. Н. Демков. Вестник ЛГУ, *11*, 127, 1953.
[3] G. A. Baker. Phys. Rev., **103**, 1119, 1956.
[4] С. П. Аллилуев. ЖЭТФ, **33**, 200, 1957.

SYMMETRY GROUP OF AN ISOTROPIC OSCILLATOR

Yu. N. Demkov

It is shown that the determination of the isotropic oscillator group with aid of the infinitesimal operators and generating elements suggested earlier by the author and the determination with aid of canonical transformations presented by Baker are equivalent. The explicit form of the group unitary operators is considered and the relation of these operators to the Green's function for an oscillator is demonstrated.