№ ~~5~~ 6

Академия наук СССР
Журнал экспериментальной и теоретической физики
Том 26, вып. 6, 1954

Ю. Н. Демков

ГРУППА СИММЕТРИИ ИЗОТРОПНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

ГРУППА СИММЕТРИИ ИЗОТРОПНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Ю. Н. Демков

Вырождение уровней энергии частицы в центральном поле по квантовому числу m обусловлено, как известно, сферической симметрией задачи. Математически эта симметрия выражается в том, что инфинитезимальные операторы группы вращения M_x, M_y, M_z коммутируют с оператором энергии H. Известны два центральных поля, в которых имеется добавочное вырождение уровней энергии и в которых эти уровни зависят только от одного квантового числа. Такими полями являются кулоново поле $U = -e^2/r$ и поле изотропного осциллятора $U = {}^1/_2 m\omega^2 r^2$. Природа добавочного вырождения уровней энергии в кулоновом поле была исследована Фоком [1], причем оказалось, что это вырождение связано с четырехмерной группой вращений.

Найдем непрерывную группу, обуславливающую вырождение уровней в случае изотропного осциллятора. Если перейти к системе единиц, в которой $h = m = \omega = 1$, то оператор энергии будет иметь вид $H = {}^1/_2 (p^2 + r^2)$. Рассмотрим оператор Φ_x, определенный следующим образом:

$$\varphi(x, y, z) = \Phi_x \psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixx'} \psi(x', y, z)\, dx'. \tag{1}$$

Этому оператору в классической механике соответствует касательное преобразование $x \to p_x$, $p_x \to -x$. Оператор H инвариантен относительно этого преобразования, и, соответственно, Φ_x коммутирует с H. Поскольку задача сферически симметрична, мы можем утверждать, что существует множество коммутирующих с H унитарных операторов $\Phi_{\mathbf{n}^0}$, представляющих собой одномерное преобразование Фурье вдоль оси, определяемой ортом $\mathbf{n}^0$. Вместе с операторами группы вращений эти операторы, а также всевозможные их произведения образуют группу, относительно которой инвариантен наш оператор энергии. Назовем эту группу группой Ф. Инфинитезимальные операторы группы Ф нетрудно найти. Всего их девять:

$$\begin{aligned} &M_x = yp_z - zp_y, \quad &&M_y = zp_x - xp_z, \quad &&M_z = xp_y - yp_x, \\ &N_x = p_y p_z + yz, &&N_y = p_z p_x + zx, &&N_z = p_x p_y + xy, \\ &H_x = p_x^2 + x^2, &&H_y = p_y^2 + y^2, &&H_z = p_z^2 + z^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Можно заменить их одним тензорным оператором

$$f_{kl} = (p_k p_l + x_k x_l) + i(x_k p_l - x_l p_k) = (p_k + ix_k)(p_l - ix_l) + \delta_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Действуя на собственную функцию оператора H $\psi_{n_1 n_2 n_3} = \psi_{n_1}(x)\psi_{n_2}(y)\psi_{n_3}(z)$ компонента f_{kl} увеличивает на единицу k-й значок функции и уменьшает на единицу l-й значок. Отсюда непосредственно следует, что вырождение уровней энергии в изотропном осцилляторе целиком обусловлено группой Ф, что и требовалось доказать.

Перестановочные соотношения компонент f_{kl} можно записать в общем виде

$$[f_{kl}, f_{mn}] = 2\delta_{ml} f_{kn} - 2\delta_{kn} f_{ml} \qquad (k, l, m, n = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Все эти рассуждения можно распространить на любую сферически симметричную систему, инвариантную относительно перестановки любой сопряженной пары координат и импульсов.

Вообще симметрия координат и импульсов, описываемая группой Ф, довольно часто встречается в теории и имеет, повидимому, глубокие основания. Конкретной физической системой, обладающей такой симметрией, является система квантов света в пустоте.

Более подробное сообщение о результатах настоящей работы публикуется в журнале «Вестник Ленинградского университета».

Ленинградский государственный
университет

Поступило в редакцию
16 октября 1952 г.

Литература

[1] В. А. Фок. ZS. f. Phys., **98**, 145, 1935.