

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**  
**(траектория 2 — углубленный курс)**  
**Программа экзамена 2018 г.**

**Часть 1**

1. Введение в классическую механику. Понятия материальной точки, системы точек, абсолютно твёрдого тела. Пространство и время в классической механике. Системы отсчёта. Пределы применимости классической механики.
2. Кинематика материальной точки: радиус-вектор, скорость, ускорение, их представление в различных системах координат (декартовой, цилиндрической, сферической). Закон движения и уравнение траектории. Проекция скорости и ускорения на оси естественного трёхгранника. Кривизна и кручение траектории, формулы Френе. Секторная скорость. Движение с постоянной секторной скоростью, формула Бине.
3. Понятие о силе и массе, законы Ньютона. Принцип относительности Галилея, преобразование Галилея. Примеры решения уравнений движения в частных случаях: сила, зависящая только от времени и сила, зависящая только от скорости.
4. Интегрирование уравнений одномерного движения в случае силы, зависящей только от координаты: разделение переменных, интеграл энергии. Исследование одномерного движения точки (финитное и инфинитное движение, потенциальная яма и барьер, точки поворота, период колебаний).
5. Законы изменения импульса, момента импульса и энергии материальной точки. Понятие интегралов движения. Работа и мощность силы. Потенциальные, гироскопические и диссипативные силы. Связь силы и потенциальной энергии. Теорема Клаузиуса о вириале сил. Механическое подобие.
6. Законы изменения импульса, момента импульса и энергии системы материальных точек. Центр масс системы материальных точек, его движение, внешние и внутренние силы. Кинетическая энергия, потенциальная энергия и полная механическая энергия. Замкнутая система, сохранение её энергии при отсутствии диссипативных сил.
7. Задача двух тел, её сведение к задаче о движении материальной точки в центральном поле, движение центра масс и относительное движение; приведённая масса. Движение в центральном поле, интегралы момента импульса и энергии, эффективная потенциальная энергия. Плоскость орбиты, уравнение траектории в полярных координатах. Исследование возможных траекторий, финитное и инфинитное движение, круговые орбиты, замкнутость траекторий, падение на центр.
8. Задача Кеплера: вывод уравнения траекторий в канонической форме, типы орбит, законы Кеплера, временная зависимость расстояния до силового центра. Случай отталкивания. Интеграл Лапласа.
9. Рассеяние частиц неподвижным силовым центром: прицельное расстояние (или параметр удара), угол рассеяния, дифференциальное и полное сечение рассеяния. Рассеяние заряженных частиц электрическим полем неподвижного заряда, формула Резерфорда. Особенности дифференциального сечения: радужное рассеяние и gloria. Упругое рассеяние двух частиц в системе центра масс и в лабораторной системе.

10. Движение системы материальных точек при наложенных связях. Классификация связей. Голономные идеальные связи, обобщённые координаты. Принцип виртуальных работ и принцип Даламбера. Уравнения Лагранжа 2-го рода, их вывод из принципа Даламбера.
11. Функция Лагранжа. Силы трения и диссипативная функция Рэлея. Обобщение уравнений Лагранжа на неголономные связи. Уравнения Лагранжа 1-го рода (с реакциями связей).
12. Принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона–Остроградского), вывод уравнений Лагранжа 2-го рода из этого принципа. Функция Лагранжа и законы сохранения, циклические координаты. Теорема Нетер.
13. Свободные малые колебания в одномерном случае. Положение устойчивого равновесия. Аппроксимация кинетической и потенциальной энергии. Собственная частота колебаний. Затухающие колебания при наличии трения. Вынужденные одномерные колебания. Случай гармонической зависимости вынуждающей силы от времени. Резонанс. Вынужденные колебания при наличии трения.
14. Свободные малые колебания в системах со многими степенями свободы. Положение устойчивого равновесия. Матрицы коэффициентов кинетической и потенциальной энергии. Аппроксимация функции Лагранжа в окрестности положения равновесия. Уравнения движения и их решение. Собственные частоты и собственные векторы колебаний. Вырождение частот. Нормальные координаты. Переход к нормальным координатам в функции Лагранжа. Вынужденные колебания в многомерных системах.
15. Кинематика абсолютно твёрдого тела. Описание вращений: направляющие косинусы, углы Эйлера. Теорема Эйлера о произвольном перемещении твёрдого тела с одной неподвижной точкой. Теорема Шаля. Угловая скорость и её свойства. Кинематические уравнения Эйлера.
16. Движение в неинерциальной системе отсчёта. Скорость и ускорение во вращающейся системе. Вращательное, осеостремительное и кориолисово ускорение.
17. Динамика абсолютно твёрдого тела: кинетическая энергия вращения, тензор инерции, главные оси и главные моменты инерции, эллипсоид инерции. Симметричный волчок, шаровой волчок, ротатор. Теорема Штейнера. Момент импульса, его связь с угловой скоростью.
18. Динамические уравнения Эйлера для волчка. Стационарность и устойчивость свободного вращения несимметричного волчка. Регулярная прецессия свободного симметричного волчка. Случай несимметричного волчка: геометрическая интерпретация Пуансо.
19. Тяжёлый симметричный волчок с одной неподвижной точкой: уравнения Лагранжа и их решение. Интегралы движения и их физический смысл. Исследование движения: нерегулярная прецессия, нутация, естественные начальные условия. Быстрый волчок. Спящий волчок.

## Часть 2

20. Канонические уравнения Гамильтона, вывод с помощью преобразования Лежандра. Функция Гамильтона. Примеры: функция Гамильтона для частицы в декартовых и сферических координатах. Сохранение обобщённой энергии. Фазовое пространство. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма. Функции Лагранжа и Гамильтона для заряда в электромагнитном поле.
21. Скобки Пуассона и их свойства. Фундаментальные скобки. Тождество Якоби. Скобки Пуассона и интегралы движения, теорема Пуассона. Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана (основной интегральный инвариант механики), интеграл Пуанкаре.
22. Канонические преобразования. Производящие функции различных типов, связь между ними. Примеры канонических преобразований: тождественные преобразования, замена координат на импульсы и импульсов на координаты, точечное преобразование. Преобразование координаты к циклической для гармонического осциллятора.
23. Использование канонических преобразований для решения задач динамики. Доказательство инвариантности скобок Пуассона относительно канонических преобразований.
24. Бесконечно малые канонические преобразования и их производящие функции. Движение как бесконечно малое каноническое преобразование. Интегралы движения как генераторы бесконечно малых канонических преобразований.
25. Интегральные инварианты канонических преобразований. Линейный интегральный инвариант. Полный интегральный инвариант: теорема Лиувилля об инвариантности фазового объёма.
26. Действие как функция координат и времени. Действие как производящая функция канонического преобразования, вывод уравнения Гамильтона–Якоби, его полный интеграл, теорема Якоби.
27. Разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби: случай стационарной функции Гамильтона, случай циклических координат, другие случаи разделения переменных. Пример: движение в поле центральной силы. Понятие о разделении переменных в сферической и параболической системах координат.
28. Укороченное действие. Вариационный принцип Мопертюи. Принцип Якоби. Аналогия с геометрической оптикой (принцип Ферма). Случай материальной точки, движущейся по криволинейной поверхности в отсутствие внешних сил, геодезические линии.
29. Периодические движения типа колебания и вращения, соответствующие фазовые траектории, сепаратрисы. Пример: плоский маятник. Условно-периодические и чисто периодические движения, случаи отсутствия и наличия вырождения. Переменные действие – угол, вычисление частот колебаний. Пример: анизотропный пространственный осциллятор.
30. Задача Кеплера в переменных действие – угол. Правило квантования действия (правило квантования Бора–Зоммерфельда), формула Бальмера для уровней энергии атома водорода.
31. Адиабатические инварианты, понятие о точности их сохранения. Пример: малые колебания математического маятника с изменяющейся длиной подвеса.

## Литература

1. И. И. Ольховский, Курс теоретической механики для физиков, изд-во МГУ, 1978.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, «Наука», 1988.
3. Г. Голдстейн, Классическая механика, Физматгиз, 1975.
4. В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, «Наука», 1989.

Из рабочей программы учебной дисциплины «Теоретическая механика (траектория 2 — углубленный курс)»:

- 1) Экзамен проводится в устной форме. Билет экзамена содержит два вопроса; первый вопрос — по материалам первой части курса, второй вопрос — по материалам второй части курса. На подготовку отводится не более 1 часа. Студенты, успешно сдавшие коллоквиум, отвечают только на второй вопрос билета. Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый материал билета и правильные ответы на дополнительные вопросы по всей программе курса. Оценка «хорошо» ставится за полностью раскрытый материал билета при неточных ответах на дополнительные вопросы по всей программе курса. Оценка «удовлетворительно» ставится за не полностью раскрытый материал билета при отсутствии правильных ответов на часть дополнительных вопросов. Оценка «неудовлетворительно» ставится, если ответ студента не удовлетворяет перечисленным выше критериям оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно». Допускается передача неудовлетворительной оценки коллоквиума во время экзамена. Общая оценка за экзамен по теоретической механике выставляется на основе результатов коллоквиума и ответа на экзамене.
- 2) Во время коллоквиума и экзамена студенты имеют право пользоваться своими конспектами при соблюдении следующих правил: а) Конспекты во время проведения экзамена или коллоквиума лежат на отдельном столе в той аудитории, где проводится аттестация. б) Студент может подойти и посмотреть свой конспект в течение короткого времени (не более 5 минут). в) Запись материала конспекта на отдельные листы, а также перенос его со стола в аудиторию не допускаются.

Д. А. Тельнов